

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

40. Band, Heft 1/3

1. November 1951

S. 1—144

Geschichte.

Brun, Viggo: Die mathematische Darstellungsweise im Laufe der Zeit. Norsk mat. Tidsskr. 32, 12—26 (1950) [Norwegisch].

Vogel, Kurt: Das älteste deutsche gedruckte Rechenbuch Bamberg 1482. Festschr. Maximiliansgymnasium München, 231—277 (1949).

Il presente lavoro contiene un pregevole ed accurato esame dell'unico frammento giunto fino a noi del „Bamberger Rechenbuch“ edito nel 1482. Si tratta della più antica stampa tedesca di calcolo che si conosca: essa consiste di un unico foglio di pergamena nel quale — da un solo lato — sono stampate sei pagine che contengono una raccolta di 26 problemi riguardanti i diversi campi dell'attività commerciale dell'epoca. — L'A. in una interessante introduzione inquadra il libro nel suo tempo, quando nella scuola inferiore non esisteva addirittura nessun insegnamento di calcolo. Viene poi riportato — con opportune modificazioni di linguaggio e interpolazioni — il testo del frammento (dell'originale è data una riproduzione fotografica) e a questo fa seguito una spiegazione dei problemi: di alcuni di essi è anche indicato lo svolgimento come, presumibilmente, veniva effettuato con i mezzi di cui si disponeva a quell'epoca. Seguono tre interessanti appendici. Nella prima sono passate in rassegna le unità di misura usate. La seconda tratta della forma delle cifre arabe (il Bamberger Rechenbuch 1482 è il primo libro tedesco a stampa nel quale compare la cifra 4 nella forma attualmente usata). La terza riguarda i prezzi delle merci. — Il lavoro termina con quattro indici: un indice delle parole, assai utile per chi voglia esaminare direttamente il testo, un indice delle misure, un indice dei nomi e, infine, un indice delle cose.

A. Barlotti.

● **Winter, E. J.:** Leben und geistige Entwicklung des Sozialethikers und Mathematikers Bernhard Bolzano. 1781—1848. (Hallische Monographien, Nr. 14). Halle/S.: Verlag Max Niemeyer 1949. 100 S. DM 6,50.

Vorliegende Schrift enthält eine verdienstvolle Kurzbiographie und einen längeren Abschnitt über Bolzanos sozialethische Studien. Leider geht Verf. bei Würdigung der wichtigen mathematischen Arbeiten, die uns hier vor allem interessieren, fast gar nicht auf die bedeutungsvollen Einzelfragen ein. Für den Spezialforscher sind die aus dem handschriftlichen Nachlaß stammenden Beilagen über den Gegensatz Bolzanos zu Leibniz und über die Wissenschaftslehre (beachtliche Selbstkritik) von Wert.

Josef Ehrenfried Hofmann.

Brun, Viggo: Das verschwundene Abelmanuskript. Norsk. mat Tidsskr. 31, 56—58 (1949) [Norwegisch].

Harkin, Duncan: The scientific contributions of Niels-Henrik Abel (1802—1829) and Sophus Lie (1842—1899). Norsk mat. Tidsskr. 32, 68—78 (1950).

● **Millas Vallerosa, José Maria:** Studien über die Geschichte der spanischen Wissenschaft. Barcelona: Consejo Superior de Investigaciones Científicas, Instituto Luis Vives de Filosofía, Sección de Historia de la Filosofía Española 1949. 499 p. [Spanisch].

Størmer, Carl: Erinnerungen an Elling Holst. Norsk mat. Tidsskr. 31, 85—88 (1949) [Norwegisch].

Aubert, K. E.: Professor Øystein Ore 50 Jahre. Norsk mat. Tidsskr. 31, 81—84 (1949) [Norwegisch].

Koutský, Karel: Prof. Dr. Karel Petr zum Gedächtnis. Časopis Mat. Fys., Praha 75, D 341—D 345 (1950) [Tschechisch].

Selberg, Sigmund: Professor Ralph Tambs Lyche 60 Jahre. Norsk mat. Tidsskr. 32, 65—67 (1950) [Norwegisch].

Grundlagenfragen. Philosophie. Logik.

● Lense, J.: Vom Wesen der Mathematik und ihren Grundlagen. München. Leibniz Verlag 1949. 68 S. mit 2 Abb. Broschiert DM 4,20.

Verf. versteht es, auch dem Gebildeten, der nur die Schulmathematik kennt, einen Einblick in das, was man heute unter Grundlagenforschung versteht, zu bieten. Er gibt klare Charakterisierungen der Gebiete: Axiomatik, Mengenlehre, Intuitionismus, Logistik, Paradoxien, Metamathematik im Sinne Hilberts, Anwendungen der Mathematik (Erfahrungswissenschaften und Wahrscheinlichkeit). Eine Stammtafel der Familie Bernoulli macht den Schluß. Stets ist Verf. bemüht, das historische Verständnis und die Notwendigkeit der Probleme darzulegen, womit dem Vorwurf, es handle sich um bloße Spielereien, am besten begegnet wird.

Andreas Speiser.

Whittaker, Edmund: The concept of nature, from Copernicus to Newton. Advanc. Sci., London 7, 25—31 (1950).

Wiedergabe eines Vortrages, der klar und wohl allgemeinverständlich die Entwicklung des physikalischen naturphilosophischen Weltbildes von Kopernikus über Tycho, Kepler, Galilei, Descartes, Fermat, Hooke bis zu Newton vermittelt.

Rudolf Seeliger.

Gião, António: Vers une réhabilitation du déterminisme. Gaz. Mat., Lisboa 11, Nr. 43, 7—9 (1950).

Verf. geht von der Annahme aus, daß es ein mathematisches Etwas (Wesen) gibt, dessen Eigenschaften mit denen des physikalischen Universums in Korrespondenz gesetzt werden können. Unter der Voraussetzung, daß das Universum vollständig autonom und aus sich selbst bestimmt ist, muß auch dieses mathematische Wesen vollständig aus sich bestimmt sein. Zur Beschreibung können zwar lokal Wahrscheinlichkeiten scheinbar zweckmäßig sein, die mathematische Möglichkeit der Einführung von Diagonalmatrizen (Normalisierung) gestattet jedoch, alle Wahrscheinlichkeiten in Gewißheiten umzuwandeln. Da es in der einmalig vorhandenen Welt keine willkürlichen Parameter gibt, haben dort Wahrscheinlichkeiten keinen Platz, diese kommen in die Naturbeschreibung nur durch die Betrachtung von Ausschnitten fiktiver Welten hinein. Die richtige Naturbeschreibung verlangt eine Angabe über die „Anwesenheitsintensität“ (intensité de la présence) der Elementarbestandteile des Universums für jeden Raumzeitpunkt. Damit ist nach der Meinung des Verf. die Frage: Determinismus oder Indeterminismus auf die Frage nach der Existenz des vorausgesetzten mathematischen Wesens zurückgeführt; dieses muß aber existieren, da es undenkbar ist, daß die Welt nicht autonom ist. Die Schwierigkeiten in der Physik entspringen nach Verf. lediglich aus der Gegenüberstellung von Objekt und Beobachter, im Universum sind beide gleichartige Teile. Der Mensch muß sich als Stück der Raumzeitwelt fühlen, die eine „Incarnation“ der Zahl ist.

Adolf Kratzer.

Gião, António: Rationalisme cartésien et positivisme expérimental dans la science moderne. Gaz. Mat., Lisboa 11, Nr. 44—45, 1—4 (1950).

Descartes hat die Forderung aufgestellt, daß in letzter Instanz der Verstand allein über die Zulässigkeit eines Postulates zu entscheiden hat. Die Zulässigkeit eines Postulates ist dabei in einer fortschreitenden Anpassung an die Beobachtung und Erfahrung zu entscheiden. In diesem Sinne kann die Newtonsche Dynamik ebenso wie die Maxwellsche Elektrodynamik als cartesisch bezeichnet werden.

Auch die allgemeine Relativitätstheorie als Theorie der gegenseitigen Bedingtheit von Raumzeitwelt und Materie ist eine Naturwissenschaft im Sinne von Descartes, ein Versuch eines einheitlichen rationell begründeten Weltbildes. Dazu steht im Gegensatz die positivistische Physik der Quantenmechanik in ihrer statistischen Interpretation, die zu einer notwendig unanschaulichen Welt führt und damit zu ihren positivistischen Grundlagen in Widerstreit gerät. Im Sinne von Descartes hat eine Theorie von verstandesmäßig begründeten Axiomen a priori auszugehen, die Erfahrung hat sie a posteriori zu bestätigen; die positivistischen Quantentheoretiker haben zu wenig Vertrauen in die Leistungsfähigkeit des Verstandes. Gleichzeitig stellen sie sich damit auch gegen die Forderung der Relativitäts-Theorie. Diese Schwierigkeit läßt sich, wie der Verf. behauptet und an anderer Stelle ausgeführt hat [Bol. Soc. Portuguesa Mat., A 1, 29—40 (1947)], vermeiden, wenn man eine Quantentheorie durchführt, in die statt der Wahrscheinlichkeitsdichten Anwesenheitsintensitäten eingehen.

Adolf Kratzer.

Pi Calleja, Pedro: Der Einwand von Grandjot gegen die Peanosche Theorie der natürlichen Zahlen. Math. Notae, Rosario 9, 143—151 (1949) [Spanisch].

L'A. si riferisce a un'obiezione di Grandjot il quale aveva osservato che necessitano nuovi assiomi per legittimare la definizione ricorrente di somma di numeri interi, secondo Peano. Landau nella prefazione dei „Grundlagen der Analysis“ afferma che la somma di numeri interi non viene definita, una volta ammessi i cinque postulati di Peano; che, però, basandosi su una comunicazione orale di Kalmár, non occorrono altri postulati, oltre quelli di Peano, per risolvere l'obiezione di Grandjot. L'A. precisa e sviluppa i ragionamenti che occorre fare per giustificare questa asserzione di Landau che è stata poi riportata anche da Dubreil nella sua „Algèbre“ (Paris 1926) (Si tratta in fondo di dimostrare l'esistenza e l'unicità di $x + y$ prima per $x = 1$ con induzione rispetto a y , poi per induzione rispetto a x). Dopo avere osservato che Hilbert-Bernays nei „Grundlagen der Mathematik“ (Vol. I, Berlin 1934; questo Zbl. 9, 145) fa notare che, secondo il suo schema, per definire la somma, oltre i postulati di Peano, occorre possedere anche l'idea primitiva di $+$, l'A. fa alcune interessanti osservazioni sulle definizioni ricorrenti.

Landolino Giuliano.

Kreisel, G.: Note on arithmetic models for consistent formulae of the predicate calculus. Fundamenta Math., Warszawa 37, 265—285 (1950).

Ein neuer Beweis für die Existenz unentscheidbarer arithmetischer Aussagen in mengentheoretischen Systemen S , der — ähnlich wie derjenige Mostowskis (dies. Zbl. 39, 8) — von der Existenz abzählbarer Modelle Gebrauch macht, aber elementarer ist als jener — die unentscheidbare Aussage Π kann auf die Form $\forall x \exists y R(x, y)$ mit rekursivem R gebracht werden. — Unter Benutzung des vom Verf. vermiedenen — für beliebige typenfreie Systeme auch problematischen — Begriffs eines Standard-Modells (vgl. Henkin, dies. Zbl. 39, 8) ist die Beweisidee sehr anschaulich zu formulieren: Was beweisbar ist aus S , gilt für jedes Modell von S . Die Interpretation von Π in einem Standard-Modell ist kontradiktorisch zur Interpretation von Π in dem Skolem-Gödel-Bernays-Modell, das nach der Methode von Hilbert-Bernays, Grundlagen der Mathematik (zitirt als HB.) II, pp. 234—253 (Berlin 1939, dies. Zbl. 20, 193) konstruiert wird. — Verf. benutzt dagegen die finiten Ersatzbegriffe: gültig in einem Standard-Modell \approx beweisbar (bzw. auch: unwiderlegbar) in einer ω -consistenten Erweiterung von S . Die Formeln $\forall x (q(x) = 0) \rightarrow \tilde{S}^*$, $\forall x (q(x) = 0) \rightarrow \tilde{S}^*$ (vgl. HB. II, p. 246) selbst werden als Modelle bezeichnet [$\forall x (q(x) = 0)$ drückt — via Arithmetisierung — die Widerspruchsfreiheit von S aus]. — t^* sei in einer geeigneten Numerierung der variablenlosen S -Terme die Nummer von t , i_n die „Ziffer n “ im Formalismus von S , $i(n) = (i_n)^*$ sei primitiv rekursiv. Z_S gehe aus Z_μ (vgl. HB. II, p. 293) durch Hinzunahme der Formel $\forall x (q(x) = 0)$ als Axiom hervor. $e(a, b) = 0$ sei das Prädikat, das dem Symbol „ ϵ “ durch die Konstruktion von HB. II, p. 245 zugeordnet wird. S enthalte die Zahlentheorie in folgendem Sinne: Ist $\mathfrak{P}(a)$ eine Formel des Formalismus von Z_μ , so kann im Formalismus von S ein Term p konstruiert werden, so daß (a) (i) wenn $\mathfrak{P}(0^{(n)})$ beweisbar aus Z_μ , so $i_n \in p$ aus S , (ii) wenn $\mathfrak{P}(0^{(n)})$ beweisbar aus Z_μ , so $i_n \in p$ aus S , (b) wenn $\mathfrak{P}(0^{(n)})$ beweisbar aus Z_S , so ist $i_n \in p$ unbeweisbar aus S . [Nach Ansicht des Ref. braucht man statt (a) (i), (ii) ein Analogon zu (b): (a*) wenn $\mathfrak{P}(0^{(n)})$ beweisbar aus Z_S ,

so ist $i_n \in p$ unbeweisbar aus S]. — Es wird gezeigt: Lemma: $t_1 \in t_2$ ist beweisbar aus S genau dann, wenn $c(0^{(t_1)}, 0^{(t_2)}) = 0$ beweisbar aus Z_S . Theorem I: u sei dem Ausdruck $e(i(n), n) = 1$ im Sinne von (a), (b) zugeordnet; dann ist $i_{u*} \in u$ unentscheidbar aus S . Theorem II: Die Widerspruchsfreiheit von S ist in S unbeweisbar [ob die der Bedingung (3) von HB. II, p. 286 entsprechende Voraussetzung erfüllt ist, bleibt unentschieden]. — Diskussion der Bedeutung des Diagonalverfahrens: In welchem Sinne ist die Diagonalklasse verschieden von allen Gliedern der Folge? — Keine der vom Verf. vorgeschlagenen beweistheoretischen Definitionen der Verschiedenheit kann nach Meinung des Ref. ganz befriedigen, da hiernach einerseits die durch $a = 0 \rightarrow \mathbb{U}$ bzw. $a = 0 \rightarrow \mathbb{U}$ definierten Klassen als nicht verschieden, andererseits die durch $a = a$ bzw. $a = 0 \rightarrow \mathbb{B}$ (\mathbb{B} sei eine wahre, aber selbst unter Heranziehung von beliebigen ω -consistenten Erweiterungen unbeweisbare Aussage) definierten Klassen als verschieden gelten müßten. — *G. Hasenjaeger.*

Rasiowa, Helena: Some theorems about the intuitionistic and Lewis functional calculi of first order. Časopis Mat. Fys., Praha 74, Nr. 3, 146—147 und polnische Zusammenfassg. 147 (1950).

In Beantwortung von in A. Mostowski's Proofs of non-deducibility in the intuitionistic functional calculus (dies. Zbl. 31, 193) offen gebliebenen Fragen teilt Verf. die folgenden Sätze mit: Eine Formel des intuitionistischen Prädikatenkalküls ist genau dann beweisbar, wenn sie, als (I, L) -Funktional gedeutet, für jedes nichtleere I und für jeden Brouwerschen Verband identisch gleich 0 ist; mit der Verschärfung: genau dann wenn sie für Ein geeignetes (I_0, L_0) identisch ist. — Ein analoges Theorem für den Prädikatenkalkül über dem Lewis-System S_4 und „closure algebras“ mit 1 als ausgezeichnetem Wert. — Beweise werden angekündigt.

G. Hasenjaeger.

• **Hilbert, D. and W. Ackermann:** Principles of mathematical logic. English translation by Lewis M. Hammond, George G. Leckie and F. Steinhardt. — Edited and with notes by Robert E. Luce. New York: Chelsea Publishing Co. 1950. XII, 172 p.

Algebra und Zahlentheorie.

Allgemeines. Kombinatorik:

Lietzmann, Walter: Lustiges und Merkwürdiges von Zahlen und Formen. 7. Aufl. Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht 1950. 276 S. DM 11.80.

This is the seventh edition of this very well known work (5th ed. Breslau 1941; this Zbl. 25, 97), which has been revised and brought up to date by the author as references to journals of 1949 and 1950 bear witness. It has been said that one of the most important requirements of a good teacher is the art of digression. This book contains a remarkable collection not only of puzzles, but also of jokes, verses and pictures bearing on elementary mathematics; an excellent source of material for digression. The publishers also are to be congratulated on the beauty of the printing and the illustrations.

W. W. Sawyer.

Lineare Algebra. Polynome. Formen:

Parker, W. V.: On matrices whose characteristic equations are identical. Proc. Amer. math. Soc. 1, 464—466 (1950).

Verf. gibt zwei Fälle an, in denen die charakteristischen Gleichungen der beiden Matrizen M und $M + N$ in einfacher Weise zusammenhängen. Die Bedingungen von Satz 1 sind kompliziert zu formulieren. Satz 2 besagt, daß die charakteristischen Gleichungen übereinstimmen, wenn $MN = N^2 = 0$ gilt. [Bemerkung des Referenten: Beide Sätze sind Sonderfälle der nicht tiefliegenden Beziehung, daß $|xE - N| \cdot |xE - M| = x^n |xE - (M + N)|$ ist, wenn $NM = 0$ gilt.]

Helmuth Wielandt.

Potter, H. S. A.: On the latent roots of quasi-commutative matrices. Amer. math. Monthly **57**, 321—322 (1950).

Sind A, B n -reihige Matrizen mit $AB = \omega BA$, worin ω eine primitive q -te Einheitswurzel bedeutet, so stehen die Eigenwerte α_v von A , β_v von B , γ_v von $C = A + B$ und δ_v von $D = AB$ bei passender Numerierung zueinander in der Beziehung $\gamma_v^q = \alpha_v^q + \beta_v^q$, $\delta_v^q = (-1)^{q-1} \alpha_v^q \beta_v^q$.
Helmut Wielandt.

Ledermann, Walter: Bounds for the greatest latent roots of a positive matrix. J. London math. Soc. **25**, 265—268 (1950).

Die bekannte Ungleichung $|\lambda| \leq R = \max R_i$ mit $R_i = \sum_k |a_{ik}|$, welche für die Eigenwerte λ jeder Matrix mit komplexen Elementen a_{ik} gilt, wird hier unter der Voraussetzung verschärft, daß alle $a_{ik} \neq 0$ und mindestens zwei R_i voneinander verschieden sind: Gilt $|a_{ik}| \geq \varepsilon > 0$ und ist für $R_i < R_j$ stets $R_i R_j^{-1} \leq \delta < 1$, so gilt $|\lambda| < R - \varepsilon(1 - \delta^{\frac{1}{2}})$.
Helmut Wielandt.

Ostrowski, Alexandre: Sur la variation de la matrice inverse d'une matrice donnée. C. r. Acad. Sci., Paris **231**, 1019—1021 (1950).

Mißt man die „Größe“ einer Matrix A durch die übliche Norm $\|A\| = (\sum |a_{\alpha\lambda}|^2)^{\frac{1}{2}}$, so gilt

$$\left\| \frac{d}{dt} \|A^{-1}\| \right\| \leq \|A^{-1}\|^2 \cdot \left\| \frac{d}{dt} A \right\|,$$

wenn A eine Inverse besitzt und die Elemente von A differenzierbar von t abhängen.
Helmut Wielandt.

Richter, Hans: Zum Logarithmus einer Matrix. Arch. Math., Karlsruhe **2**, 360—363 (1950).

Sei A eine komplexe quadratische Matrix, deren Eigenwerte λ_i nicht null oder negativ reell sind, dann ist

$$\ln A = C \begin{pmatrix} \ln \lambda_1 \\ \vdots \\ \ln \lambda_n \end{pmatrix} C^{-1},$$

wobei immer ein bestimmter Zweig des Logarithmus gemeint ist und C eine geeignete quadratische Matrix ist. Verf. zeigt nun, wie $\ln A$ ohne Kenntnis der Eigenwerte direkt aus den Koeffizienten der charakteristischen Gleichung von A berechnet werden kann. Der Fall von mehrfachen Eigenwerten wird in üblicher Weise durch Grenzübergang behandelt.
Adolf Kriszten.

Duparc, H. J. A.: On canonical forms. Math. Centrum, Amsterdam, Rapport ZW 1950—020, 8 p. (1950) [Holländisch] (hektographiert).

Kurze Wiedergabe eines Vortrages in der Serie „Actualitäten“, in dem kurz ein Satz von E. Lasker [Math. Ann. **58**, 434—440 (1904)] besprochen wird, dem E. K. Wakeford 1916 eine Formulierung mit dem Apolaritätsbegriff gegeben hatte [Proc. London math. Soc., II. S. **18**, 403—410 (1919/20)]. Hier wären auch noch zu nennen Arbeiten von H. W. Richmond [Quart. J. Math. **33**, 331—340 (1902)] und E. W. Bodewig [Giorn. Mat. Battaglini **64**, 81—100 (1926)]. Die Anwendung auf die Darstellung einer Form als Potenzsumme wird durch einige Beispiele erläutert.
R. W. Weitzenböck.

Sz.-Gyula (Julius): Sur un théorème de M. Biernacki. Ann. Soc. Polonaise Math. **23**, 224—229 (1950).

Soient z_k ($1 \leq k \leq n$), λ et μ des nombres complexes arbitraires, m_k ($1 \leq k \leq n$) des nombres > 0 arbitraires; on considère la fonction rationnelle $h(z) = \lambda + \mu \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{z - z_k}$.

L'A. montre (généralisant un résultat antérieur de M. Biernacki relatif au cas où les m_k sont tous égaux à 1) que si tous les z_k sont dans le cercle K de centre z_0 et de rayon r , $n - 1$ au moins des zéros de $h(z)$ sont dans le cercle concentrique K_1 de rayon $r/\sqrt{2}$. Il utilise pour cela un de ses théorèmes antérieurs, d'après lequel

si ζ_1, ζ_2 sont des zéros distincts de $h(z)$, H une hyperbole équilatère passant par ces points et de centre $\frac{1}{2}(\zeta_1 + \zeta_2)$, il y a au moins un des z_k dans la région d'où on peut mener à H deux tangentes réelles et un autre z_k dans le complémentaire de cette région, sauf si tous les z_k sont sur H : il suffit alors de prouver que si ζ_1 et ζ_2 sont tous deux extérieurs à K_1 , il y a une hyperbole H correspondante ne rencontrant pas K .

Jean Dieudonné.

Gruppentheorie:

Foster, A. L.: Some elementary identities of ordered abelian sets. Amer. math. Monthly 57, 681—683 (1950).

Eine Abelsche Gruppe enthalte eine einfach geordnete Untermenge S , in der $b - a \in S$ aus $a \leq b$ folgt. In S werden zwei zwei-parametrische Funktionen in folgender Weise eingeführt: Wenn $a \leq b$, so ist $|a, b| = |b, a| = b - a = |a, b|$ und es ist $|b, a| = 0$. Ferner wird das in der Anordnung in S „mittlere“ der Elemente a, b, c mit $[a, b, c]$ bezeichnet. Es werden mehrere Identitäten abgeleitet, z. B.

$$|a, b| + |b, c| - |a, c| = |b, [b, c, a]| \quad \text{und} \quad |x, y| + |y, z| - |y, z| - |x, z| = 2|y, [y, z, x]|.$$

F. W. Levi.

Kontorovič, P. G.: Gruppen mit Zerspaltungsbasis. III. Mat. Sbornik, n. S. 22 (64), 79—100 (1948) [Russisch].

Kontorovič, P.: Zur Theorie der nicht-kommutativen Gruppen ohne Torsion. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 59, 213—216 (1948) [Russisch].

Kontorovič, P. G.: Gruppen mit Zerspaltungsbasis. IV. Mat. Sbornik, n. S. 26 (68), 311—320 (1950) [Russisch].

Die ersten zwei Arbeiten desselben Titels sind in Mat. Sbornik, n. S. 12 (54), 56—70 (1943) und 19 (61), 287—308 (1946) erschienen. Die zweite hier ref. Arbeit enthält eine kurze Voranzeige, ohne Beweise, der Hauptergebnisse. Diese Arbeiten sind, abgesehen von den Definitionen, im wesentlichen unabhängig von den vorangehenden. — Eine Gruppe G heißt zerspaltbar, wenn sie als mengentheoretische Summe von echten, bis auf die Gruppeneins paarweise fremden Untergruppen dargestellt werden kann (vgl. hierzu Takahasi, dies. Zbl. 36, 293); die Zerspaltung heißt vollständig, wenn die Untergruppen der Zerspaltungsbasis lokal-zyklisch, d. h. Abelsche Gruppen vom Rang 1 sind (Untergruppen und Faktorgruppen der additiven Gruppe der rationalen Zahlen). Eine Untergruppe H heißt isoliert in einer Gruppe G , wenn die Lösungen in G einer Gleichung $x^n = h$ ($h \in H, h \neq 1$) alle in H liegen. Eine isolierte Untergruppe ist immer eine Servanz-Untergruppe im Sinne Prüfers. Für vollständig zerspaltbare torsionsfreie Gruppen gilt auch die Umkehrung. Hierbei heißt eine Gruppe torsionsfrei (neuerdings zieht man den Namen lokal-unendlich vor), wenn sie keine Elemente endlicher Ordnung $\neq 1$ besitzt. Vollständig zerspaltbare torsionsfreie Gruppen nennt Verf. R -Gruppen. Dazu gehören die torsionsfreien Abelschen Gruppen, ferner Gruppen, die als Vereinigung einer endlichen oder unendlichen aufsteigenden Zentralreihe mit torsionsfreien Faktorgruppen dargestellt werden können, freie und lokal-freie Gruppen usw. Untergruppen und Faktorgruppen, direkte und freie Produkte von R -Gruppen sind R -Gruppen. Die Operation des Wurzelziehens ist in R -Gruppen, wenn überhaupt möglich, dann eindeutig. Eine torsionsfreie Gruppe ist R -Gruppe dann und nur dann, wenn der Zentralisator jedes Elementes eine isolierte Untergruppe ist. Der Durchschnitt aller isolierten Untergruppen, die eine gegebene Untergruppe H von G enthalten, heißt der Isolator von H in G . Er ist Normalteiler (charakteristisch), wenn H Normalteiler (charakteristisch) ist. Das Hauptresultat der Arbeiten besteht in dem Nachweis, daß sich wesentliche Teile der Theorie der vollständig reduzierbaren torsionsfreien Abelschen Gruppen [vgl. R. Baer, Duke math. J. 3, 68—122 (1937);

dies. Zbl. 16, 203] auf R -Gruppen übertragen lassen, insbesondere die Klassifikation der Elemente und der lokal-zyklischen Komponenten der Basis mit Hilfe von „Steinitz-Zahlen“ und Genera (Geschlechter). (Für die Definitionen vgl. die zitierte Arbeit von Baer.) Die Modifikationen beziehen sich teilweise auf die Terminologie, teilweise auf eine verbesserte Symbolik. Die Beweis-Ideen dagegen bleiben erhalten.

Kurt A. Hirsch.

Szele, T.: Die unendliche Quaternionengruppe. Acad. Republ. popul. Române Bul. Sti. A 1, 791—794 [Rumänisch], 795—798 [Russisch], 799—802 [Deutsch] (1949).

Q_n mit $n \geq 3$ sei die verallgemeinerte Quaternionengruppe der Ordnung 2^n , dann wird die Existenz und Eindeutigkeit einer Gruppe Q_∞ mit folgenden Eigenschaften nachgewiesen: Q_∞ ist die kleinste Gruppe, die alle Q_n in der Art enthält, daß $Q_n \subset Q_{n+1}$ gilt. Es folgen einige einfache Betrachtungen über die Struktur dieser Gruppe. Außerdem ist bekannt, daß sämtliche durch eine „Untergruppe beherrschten“ endlichen nichtkommutativen Gruppen (im Sinne von Prüfer) die Quaternionengruppen sind. Q_∞ wäre ebenfalls eine durch eine Untergruppe beherrschte Gruppe, und es wird die Vermutung ausgesprochen, daß sie die einzige nichtkommutative Gruppe dieser Art ist.

Helmut Ulm.

Weyl, Hermann: Elementary algebraic treatment of the quantum mechanical symmetry problem. Canadian J. Math. 1, 57—68 (1949).

Es sei $\Sigma = \Sigma_{n,f}$ der Raum aller n -dimensionalen Tensoren $\eta(i_1, \dots, i_f)$ der Stufe f ; die Argumente i variieren über $i = 1, 2, \dots, n$. Es sei $P = \Sigma_{v,f}$ der Raum aller v -dimensionalen Tensoren $\varphi(q_1, \dots, q_f)$ der Stufe f ; die Argumente q variieren über $q = 1, \dots, v$. Schließlich sei Ω der Raum aller antisymmetrischen $n \cdot v$ -dimensionalen Tensoren $\psi(i_1 q_1, \dots, i_f q_f)$ der Stufe f . Diese Tensoren ψ beschreiben in gewisser Weise die Zustände eines Systems von f Elektronen, wobei $v = 2$ zu wählen ist und die q Spinvariable bedeuten. Jede symmetrische Transformation A in Σ , nämlich $\eta'(i_1, \dots, i_f) = \sum_k a(i_1, \dots, i_f; k_1, \dots, k_f) \eta(k_1 \dots k_f)$, gibt Anlaß zu der Transformation A^* in Ω , die erklärt ist durch

$$\psi'(i_1 q_1, \dots, i_f q_f) = \sum_k a(i_1, \dots, i_f; k_1, \dots, k_f) \psi(k_1 q_1, \dots, k_f q_f).$$

Die Algebra aller A^* wird mit \mathfrak{A}^* bezeichnet. Entsprechend führt jede symmetrische Transformation B in P , nämlich

$$\varphi'(q_1, \dots, q_f) = \sum_\sigma b(q_1, \dots, q_f; \sigma_1, \dots, \sigma_f) \varphi(\sigma_1, \dots, \sigma_f)$$

zu einer Transformation B^* in Ω , nämlich

$$\psi'(i_1 q_1, \dots, i_f q_f) = \sum_\sigma b(q_1, \dots, q_f; \sigma_1, \dots, \sigma_f) \psi(i_1 \sigma_1, \dots, i_f \sigma_f).$$

Die Transformationen B^* bilden die Algebra \mathfrak{B}^* . — Es wird die Aufgabe gestellt, Ω in invariante Teilräume gegenüber den Transformationen A^* zu zerlegen. Diese Aufgabe wird vollständig und explizit durchgeführt, allerdings unter Beschränkung auf den physikalisch bedeutsamen Fall $v = 2$. Als Hilfsmittel wird die Clebsch-Gordansche Reihenentwicklung herangezogen. Ohne die Beschränkung $v = 2$ wird gezeigt, daß \mathfrak{A}^* die Kommutationalgebra von \mathfrak{B}^* ist.

Franz Rellich.

Suzuki, Michio: On the finite group with a complete partition. J. math. Soc. Japan 2, 165—185 (1950).

A partition of a group G is a system of subgroups called components such that every element $\neq 1$ of G belongs to exactly one component. A partition all of whose components are cyclic is called „complete“. If G has a complete partition, G is called completely decomposable (c. d.). — The author determines the structure of all finite non-simple c. d. groups. He also conjectures that every simple c. d. group is a linear fractional group LF(2, p^n). — In § 1 three theorems, essentially contained in P. Kontorovitch [Mat Sbornik, n. S. 5 (47), 283—296 (1939) and 7 (49), 27—33 (1940), this Zbl. 22, 313, 23, 12] are reproved independently for use throughout the paper. The author calls a group G „of type D “, if G is the direct product of a cycle of order p (p prime)

and a group generated by a and b with defining relations $a^n = b^p = 1$, and $ba b^{-1} = a^r$, where $(n, p(r-1)) = 1$ and $r^p \equiv 1 \pmod n$. The theorems then are as follows: I. A p -group is c. d. if, and only if, it is either cyclic, or of exponent p , or a dihedral group. II. A directly decomposable group is c. d. if, and only if, it is either cyclic, or a p -group of exponent p , or a group of type D . III. A group is c. d. and has non-trivial centre if, and only if, it is of one of the following types: 1. a cyclic group, 2. a p -group of exponent p , 3. a dihedral group of order divisible by 4, 4. a group of type D . — § 2 deals with solvable c. d. groups. In fact it determines all c. d. groups with a non-trivial solvable normal subgroup, and the possible types obtained turn out to be solvable groups, viz. of one of the following seven types: 1.—4. as in Theorem III, § 1; 5. a group generated by a and b with defining relations $a^n = b^m = 1$, $ba b^{-1} = a^r$, where $(n, m(r-1)) = 1$, $r^m \equiv 1 \pmod n$, and m is the exact exponent of r modulo n and modulo all proper divisors of n ; 6. the S_4 ; 7. a group G which is the extension of a p -group of exponent p by a cyclic group of automorphisms. However, not every group of this last type is c. d., but a criterion for it to be c. d. is given. — § 3 prepares for the final paragraph by proving that every factor group of a finite c. d. group is itself c. d.; and that the minimal normal subgroup of a non-simple, non-solvable c. d. group G is of index two in G (its uniqueness is implicit in the results of the previous paragraphs). Together with the obvious fact that every subgroup of a c. d. group is c. d., these theorems enable the author to apply his results in § 4 to determine the structure of the non-solvable, non-simple c. d. groups. They are shown to be representable as triply transitive permutation groups on the cosets of a certain subgroup. Hence, using results by Zassenhaus [Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 11, 17—40 and 187—220 (1936); this Zbl. 11, 103, 249], they are proved to be isomorphic to the full linear fractional group of one variable over a finite field of characteristic > 2 . Conversely, all these groups are non-simple, non-solvable c. d. groups.

Hanna Neumann.

Tuan, Hsio-Fu: A theorem about p -groups with abelian subgroups of index p . Sci. Record, Acad. Sinica 3, 17—23 (1950).

Let G be a non-abelian p -group of order p^n containing an abelian subgroup A of order p^{n-1} . Let Z and K denote the centre and the commutator group, of orders p^z and p^k , respectively. The author proves that the factor group A/Z is isomorphic to K , and the meet $Z \cap K$ is an elementary abelian group. The isomorphism implies R. Brauer's relation $n = z + k + 1$ for the orders of G , Z , and K . — The proof uses simple commutator relations only, showing that for an arbitrary fixed element g not in A , and elements a, a' of A $[a, g][a', g] = [a a', g]$; also, every element of K is a commutator and of the form $[a, g]$ for suitable a . Thus the mapping $a \rightarrow [a, g]$ is a homomorphism of A onto K of which Z is the kernel. The proof carries over to the case that G/A is cyclic of order p^d ; again A/Z is isomorphic to K (implying $n = z + k + d$), and all elements of $Z \cap K$ have orders at most p^d . — Slightly more complicated commutator relations yield the following interesting extension: If again G/A is cyclic of order p^d , and G of order p^n and class c , and if the lower and upper central series of G are respectively $G = G_1 \supset K = G_2 \supset \dots \supset G_c \supset G_{c+1} = \{1\}$, and $G = Z_c \supset Z_{c-1} \supset \dots \supset Z_1 = Z \supset Z_0 = \{1\}$, then $A/(A \cap Z_i) \cong G_{i+1}$ for $i = 1, \dots, c$. If in particular $d = 1$, i. e. A is of order p^{n-1} , then for $i = 1, \dots, c-1$ Z_i is a subgroup of A , and therefore $A/Z_i \cong G_{i+1}$ with the consequent relations $n = z_i + k_{i+1} + 1$ for the orders $p^n, p^{z_i}, p^{k_{i+1}}$ of G, Z_i , and G_{i+1} respectively.

Hanna Neumann.

• **Kowalewski, G.:** Einführung in die Theorie der kontinuierlichen Gruppen. New York: Chelsea 1950. VIII, 396 p. \$ 4.95.

Ważowski, T.: Exemples des groupes de transformations d'une droite en elle-même qui dépendent de quatre paramètres essentiels. Prace mat.-fiz., Warszawa 47, 105—116 (1949).

L'objet de cet note est d'établir l'existence de groupes de transformations de la droite en elle-même, de classe C^∞ et dépendant de quatre paramètres essentiels dans le voisinage de points pouvant appartenir à un ensemble de mesure positive. — Soit Ω un ensemble linéaire ouvert de l'intervalle $(-\infty, +\infty)$; il existe une fonction bornée $h(x)$, de classe C^∞ dans cet intervalle, telle que $h(x) > 0$ dans Ω , $h(x) = 0$, $h^{(n)}(x) = 0$, $n = 1, 2, \dots$, dans le complémentaire de Ω . On dira que Ω se condense en le point x si une suite partielle de ses intervalles tend vers ce point.

Soient Ω_i , $i = 1, 2, 3, 4$, quatre ouverts bornés, disjoints dont chacun se condense en le point ξ^* . Désignant par $\psi_i(\xi, t_i)$ l'intégrale de l'équation $dx/dt_i = h(\Omega_i, x)$, telle que $\psi_i(\xi, 0) = \xi$, la fonction $\psi(\xi, t_1, \dots, t_4) = \left[\sum_{i=1}^4 \psi_i(\xi, t_i) \right] - 3\xi$ sera de classe C^∞ dans l'espace (ξ, t_1, \dots, t_4) et $\partial\psi/\partial\xi > 0$; $\bar{\xi} = \psi(\xi, t_1, \dots, t_4)$ définit un groupe de transformations, de classe C^∞ , de la droite en elle-même; les quatre paramètres t_i sont essentiels dans tout voisinage du point ξ^* . — Soit P un ensemble parfait, borné, de mesure de Lebesgue positive, et partout discontinu. Il existe quatre ensembles ouverts, bornés et disjoints Ω_i dont chacun se condense en chaque point de P . Il existe un groupe de transformations, de classe C^∞ , dépendant de quatre paramètres essentiels dans tout voisinage de chaque point ξ^* appartenant à P .

Th. Lepage.

Murnaghan, Francis D.: The element of volume of the rotation group. *Actas Acad. nac. Ci. exact., fis. natur. Lima* 13, 9—15 (1950).

Ausführliche Auseinandersetzung der Begriffe „Volumelement der zwei- bzw. dreidimensionalen Rotationsgruppe“ und Berechnung dieser Volumelemente. Vgl. auch dies. Zbl. 39, 257.

Gustav Lochs.

Murakami, Shingo: Remarks on the structure of maximally almost periodic groups. *Osaka math. J.* 2, 119—129 (1950).

L'A. donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe localement compact G , extension d'un groupe connexe par un groupe compact, soit un groupe maximal presque périodique; c'est une légère modification de la condition de Freudenthal $G = K \times R^n$, K compact, valable lorsque G est connexe. L'A. construit ensuite un exemple d'un groupe localement compact maximal presque périodique ne possédant pas un système fondamental de voisinages de l'élément neutre invariants par les automorphismes intérieurs du groupe. Cette dernière propriété n'est donc pas impliquée par la presque périodicité maximale, alors que pour les groupes connexes elle lui est équivalente, d'après Freudenthal. L'exemple en question est un groupe de dimension zéro ne contenant pas de sous-groupe compact ouvert invariant. Ce travail a plusieurs points communs avec un Mémoire de M. Kuranishi, *Tôhoku math. J.*, II. S. 2, 40—46 (1950).

Armand Borel.

Calabi, Lorenzo: Le estensioni centrali di gruppi. *Boll. Un. mat. Ital.*, III. S. 5, 264—266 (1950).

L'A. dit que l'extension $E(B, F)$ du groupe F par le groupe B est centrale si les restrictions à F des automorphismes intérieurs de E sont des automorphismes intérieurs de F ; comme dans le cas usuel où F est abélien, les classes d'extensions isomorphes forment un groupe isomorphe au deuxième groupe de cohomologie de B à valeurs dans C , centre de F , sur lequel B opère trivialement. Si B et F sont topologiques, on considère les extensions topologiques et l'A. énumère quelques cas où elles sont toutes fibrées, c'est à dire possèdent des sections locales. C'est en particulier vrai si B est connexe, possède un revêtement \bar{B} tel que toutes les extensions topologiques $E(\bar{B}, F)$ soient triviales et l'A. indique dans ce cas une expression du groupe des extensions qui généralise un résultat de A. Shapiro (ce Zbl. 33, 347). Dans ce travail et le suivant, il n'y a que peu d'indications sur les démonstrations.

Armand Borel.

Calabi, Lorenzo: Su alcuni rapporti tra la teoria delle estensioni ed il gruppo degli automorfismi del gruppo esteso. *Boll. Un. mat. Ital.*, III. S. 5, 286—289 (1950).

On sait qu'à une extension $E(B, F)$ de F par B correspond un homomorphisme χ de B dans le groupe $A(F)/I(F)$, quotient du groupe des automorphismes de F par le groupe des automorphismes intérieurs de F . Théorème: F étant donné, pour qu'à tout groupe B et à tout homomorphisme $\chi: B \rightarrow A(F)/I(F)$ corresponde une extension au moins, il suffit qu'il existe une extension de F par $A(F)/I(F)$ pour

laquelle χ est l'identité. — L'A. nomme $E(B, F)$ pré-inessentielle si, C étant le centre de F , l'extension de F/C par B obtenue par passage au quotient à partir de $E(B, F)$ est inessentielle. Théorème: Pour qu'une extension soit pré-inessentielle, il faut et il suffit que χ provienne d'un homomorphisme de B dans $A(F)$; l'A. en déduit que si $A(F)$ est une extension inessentielle de $I(F)$, l'ensemble des extensions $E(B, F)$ d'invariant χ donné forme un groupe isomorphe au deuxième groupe de cohomologie de B à valeurs dans le centre C de F , sur lequel B opère par χ . Dans plusieurs énoncés, l'A. doit passer de certains groupes à leurs opposés, cela est superflu si l'on fait correspondre à $z \in E$ l'automorphisme $f \rightarrow z f z^{-1}$ de F , et non pas $f \rightarrow z^{-1} f z$.
Armand Borel.

Verbände. Ringe. Körper:

Benado, Mihail: β -Normalität und Jordan-Hölderscher Satz. Acad. Republ. popul. Române, Bul. Şti. A 2, 709—710 u. russische und französ. Zusammenfassg. 710—711, 711 (1950) [Rumänisch].

L'A. expose dans cette Note la suite de ses recherches sur les théorèmes de décomposition de l'algèbre. Il y introduit une nouvelle espèce de normalité qu'il appelle binormalité, dont voici la définition: Soit $\Omega \supset \beta$; nous dirons que β est binormal dans Ω s'il y est β -normal et si l'on a l'isomorphisme de structure $\beta \cup b/\beta \xrightarrow{\sim} b/\beta \cap b$ où b est tel que $b \subset \Omega$ et tel qu'il existe une chaîne β -normale finie reliant Ω à b . D'après cela, il est clair que la seminormalité de Ore est une sous-espèce de la binormalité. — Le principal résultat énoncé dans cette Note est le théorème Schreier-Zassenhaus pour la binormalité, à savoir: Deux chaînes binormales aux extrémités communes, se transforment par les intercalaires de Zassenhaus en deux chaînes toujours binormales et telles que leurs quotients conjugués aient des structures isomorphes. — Les démonstrations des propositions énoncées dans cette Note paraîtront dans un autre recueil. (Autoreferat.)

Wendelin, Hermann: Ein Vergleichskriterium für Ausdrücke in Booleschen Verbänden und einige Anwendungen. J. reine angew. Math. 188, 147—149 (1950).

Ist T eine Teilmenge eines Booleschen Vollverbandes B , so bilden die Elemente der Form $k_\varphi = \bigcap_{t \in T} t_{\varphi(t)}$, wo $\varphi(t) = 0$ oder 1 , $t_1 = t$ und $t_0 = 1 - t$, die „Konstituenten“ von T (vgl. Verf., dies. Zbl. 38, 193); ihre Gesamtheit sei K_T . Gilt in B das distributive Gesetz (D) $1 = \bigcup_{k \in K_T} k$ für jedes $T \subset B$, so hat man das folgende Vergleichskriterium: Sind a und b nur aus Elementen von T mittels Vereinigungs-, Durchschnitts- und Komplementbildung aufgebaute Ausdrücke, so gilt $a \subset b$ dann und nur dann, wenn $ka \subset kb$ für alle $k \in K_T$. Damit kann man ein allgemeineres Distributivgesetz aus (D) gewinnen, ferner bei Gültigkeit von (D) einen Entwicklungssatz und den bekannten Isomorphiesatz, daß ein Boolescher Vollverband mit (D) dem System aller Teilmengen einer Menge isomorph ist.

Georg Aumann.

Ribenboim, Paulo: Characterization of the sup-complement in a distributive lattice with last element. Summa Brasil. Math. 2, 43—49 (1949).

Untersuchung von Brouwerschen Verbänden, d. h. Verbänden \mathfrak{R} mit I , in denen für jedes $X \in \mathfrak{R}$, die Lösungen von $X \cup R = I$ ein Minimum X° besitzen. Es wird bewiesen: Wenn für einen distributiven Verband mit I ein Operator s definiert werden kann, der den Bedingungen: $X \cup s(X) = I$; $X \cup ss(X) = X$; $s(X \cap Y) = s(X) \cup s(Y)$; $ss(X \cup Y) = ss(X) \cup ss(Y)$ genügt, so ist der Verband Brouwersch und $s(X) = X^\circ$. Die vier Axiome sind voneinander unabhängig.

F. W. Levi.

Riguet, J.: Produit tensoriel de treillis et théorie de Galois généralisée. Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. Nr. 24 (Algèbre et théorie des nombres, Paris 25. 9. — 1. 10. 1949), 173—178 (1950).

Verf. gibt eine verbesserte Darstellung mit Beweisen der angekündigten (dies. Zbl. 33, 246) Theorie, die analog zur Galoisschen Theorie ist. E sei eine Menge und U eine Menge, deren Kardinalzahl nicht kleiner als die von E ist. Jede Menge von Abbildungen von U in E heißt eine U -Relation, jede Menge \mathfrak{R} von U -Relationen

ne U -Struktur. Eine Permutation σ von E heißt ein Automorphismus bez. \mathfrak{R} , wenn $\sigma R = R$ für alle $R \in \mathfrak{R}$. Die Automorphismen bez. \mathfrak{R} bilden eine Gruppe $[\mathfrak{R}]$. Die Relationen, bez. welcher alle Permutationen einer Gruppe \mathfrak{G} Automorphismen sind, bilden einen vollständigen Booleschen Verband $\mathfrak{A}^{-1}[\mathfrak{G}]$. Es gilt

$$\mathfrak{A}[\mathfrak{A}^{-1}[\mathfrak{G}]] = \mathfrak{G}, \quad (2) \quad \mathfrak{A}^{-1}[\mathfrak{A}[\mathfrak{R}]] \supseteq \mathfrak{R}.$$

n (2) gilt = genau dann, wenn \mathfrak{R} nicht nur ein vollständiger Boolescher Verband ist, sondern noch zwei weitere Abgeschlossenheitseigenschaften hat.

Paul Lorenzen.

Amitsur, A. S. and J. Levitzki: Minimal identities for algebras. Proc. Amer. math. Soc. **1**, 449—463 (1950).

Es sei A eine Algebra über einem Körper F und $f(x_1, \dots, x_m)$ ein (nicht kommutatives) Polynom über F , das für jedes Argumentesystem $x_1, \dots, x_m \in A$ verschwindet und möglichst niederen Grad hat; dann heißt $f(x_1, \dots, x_m) = 0$ eine Minimalidentität von A . Besonders interessieren die determinantenartig gebauten „Standardpolynome“ $S(x_1, \dots, x_{im}) = S_m(x) = \sum \pm x_{i_1} \dots x_{i_m}$. Es wird bewiesen, daß in jedem vollen Matrixring A_n die Bedingung $S_{2n}(x) = 0$ eine Minimalidentität ist. Damit wird ein vom Ref. erzieltes Resultat (dies. Zbl. **33**, 103) erheblich verschärft. Außer im Falle $n \leq 2 = \text{Charakteristik von } F$, haben alle Minimalidentitäten von A_n die Form $0 = f(x_1, \dots, x_m) = \sum_{(i)} \alpha_{(i)} S(x_{i_1}, \dots, x_{i_{2n}})$, wobei $(i) \in F$ und $\sum_{(i)}$ über alle Kombinationen von m Elementen zu je $2n$ zu nehmen ist.

Von den vollen Matrixringen wird auf die halbeinfachen Ringe geschlossen; ferner werden Identitäten für Algebren gefunden, in denen das Radikal einen endlichen Index hat (hier ein Druckfehler: r und k vertauscht). Für den Fall der Charakteristik 2, mit $n \leq 2$, werden Minimalidentitäten nachgewiesen, sie sich nicht auf Standardidentitäten zurückführen lassen.

F. W. Levi.

Kawada, Yukiyo and Nagayosi Iwahori: On the structure and representations of Clifford algebras. J. math. Soc. Japan **2**, 34—43 (1950).

Es sei K ein Körper mit von 2 verschiedener Charakteristik. Unter der verallgemeinerten Cliffordschen Algebra $C(n, g)/K$, wo $0 \leq g \leq n$, $n > 0$, n, g ganz, verstehen Verf. die Algebra der Ordnung 2^n , die von den Elementen u_0, u_1, \dots, u_n erzeugt wird. u_0 ist das Einselement, und es gilt die Multiplikationsvorschrift:

$$u_i^2 = u_0 \quad (1 \leq i \leq g), \quad u_i^2 = -u_0 \quad (g + 1 \leq i \leq n), \quad u_i u_j + u_j u_i = 0 \quad (i \neq j, i > 0, j > 0).$$

$C(n, 0)$ ergibt die gewöhnlichen Cliffordschen Zahlen. $C(2m, g)$ erweist sich als normale einfache Algebra, während $C(2m + 1, g)$ halbeinfach ist. Zur Strukturbestimmung nach dem Satz von Wedderburn müssen zahlreiche Fallunterscheidungen gemacht werden, die einerseits vom Kongruenzverhalten von $g - m$ oder $g + m \bmod 2$ oder 4 abhängen oder andererseits davon, ob es in K Elemente λ bzw. α und β gibt, die den Gleichungen $1 + \lambda^2 = 0$ bzw. $1 + \alpha^2 + \beta^2 = 0$ genügen. Als Anwendung wird die Maximalanzahl N der Matrizen E_k ($1 \leq k \leq N$) vom Grad 2^m mit Elementen aus K , die den Relationen $E_k^2 = -1$, $E_k E_j = -E_j E_k$ ($j \neq k$) genügen, für die verschiedenen Restklassen von $m \bmod 4$ bestimmt. Ist $1 + \lambda^2 = 0$ in K nicht lösbar, so ergibt sich weiter die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß unter $2m + 1$ derartigen Matrizen g rein imaginär und $2m + 1 - g$ reell sind. Solche Fragen wurden zuerst von A. S. Eddington [J. London math. Soc. **7**, 52—68 (1932); dies. Zbl. **3**, 337] behandelt. Als Abschluß werden Beispiele von irreduziblen Darstellungen der Algebren $C(n, g)$ in expliziter Form gegeben.

Ernst Trost.

Azumaya, Gorô: On generalized semi-primary rings and Krull-Remak-Schmidt's theorem. Japan. J. Math. **19**, 525—547 (1948).

Gegenstand der Untersuchung sind assoziative, i. a. nicht kommutative Ringe, die den Bedingungen $(a + b) \cdot e = a \cdot e + b \cdot e$, $(a \cdot b) \cdot e = (a \cdot e) \cdot b = a \cdot (b \cdot e)$ genügende Rechtsmultiplikatoren e besitzen dürfen. In der Strukturtheorie solcher Ringe muß von einem „brauchbaren“

Radikal gefordert werden, daß in seinem Restklassenring jedes Rechts- und jedes Linksideal mindestens ein Idempotent $e \neq 0$ enthält. Ausgehend von dieser Überlegung stellt Verf. in einem ersten Abschnitt eine Reihe mehr oder minder bekannter Definitionen und Sätze über Idempotente in einer für seine Zwecke geeigneten Fassung kurz zusammen. Für das Weitere wichtig sind dabei vor allem folgende Bemerkungen: Man sagt, das Idempotent e enthalte das Idempotent f , wenn $e \cdot f = f \cdot e = f$. Gibt es kein in e enthaltenes Idempotent $f \neq e, \neq 0$, so heißt e primitiv. — Sind die Linksideale $\mathfrak{R} \cdot e$ und $\mathfrak{R} \cdot f$ im Ringe \mathfrak{R} operatorisomorph, so heißen die Idempotente e und f isomorph. e und f sind dann und nur dann isomorph, wenn a und b in \mathfrak{R} so bestimmt werden können, daß $e = a \cdot b, f = b \cdot a$ wird. — Das Linksideal $\mathfrak{R} \cdot a$ enthält dann und nur dann ein Idempotent $e \neq 0$, wenn in \mathfrak{R} ein $x \neq 0$ existiert, derart daß $xax = x$. — Anknüpfend an die letzte Bemerkung nennt Verf. im zweiten Abschnitt $q \in \mathfrak{R}$ ein Wurzelement, wenn die Gleichung $xqx = x$ durch kein $x \neq 0$ aus \mathfrak{R} erfüllt wird. Ist die Summe zweier Wurzelemente stets wieder ein solches, so bildet die Menge aller Wurzelemente ein zweiseitiges Ideal \mathfrak{r}_a , das vom Verf. als Radikal bezeichnet wird. Hier soll zur Vermeidung von Mißverständnissen vom Azumaya-Radikal gesprochen werden. Verf. betrachtet weiterhin ausschließliche Ringe, in denen das Azumaya-Radikal existiert, und nennt \mathfrak{R} : a) semiprimär, b) primär, c) streng semiprimär, d) vollständig primär, a) wenn jedes Idempotent $e \neq 0$ ein primitives Idempotent enthält, b) wenn \mathfrak{R} semiprimär ist und alle primitiven Idempotente isomorph sind, c) wenn in \mathfrak{R} hinsichtlich des Enthaltenseins die Maximalbedingung für Idempotente gilt, d) wenn jedes Idempotent $e \neq 0$ primitiv ist. Es gelten dann vor allem die folgenden Sätze: a) \mathfrak{R} ist dann und nur dann semiprimär, wenn jedes nicht ausschließlich aus Wurzelementen bestehende Linksideal ein primitives Idempotent enthält. b) Die im Sinne von Nakayama und Azumaya (dies. Zbl. 29, 106) ideal-irreduzibeln Ringe sind identisch mit den primären Ringen, bei denen $\mathfrak{r}_a = (0)$. c), d) \mathfrak{R} ist dann und nur dann streng semiprimär bzw. vollständig primär, wenn $\mathfrak{R}/\mathfrak{r}_a$ halbeinfach bzw. ein Schiefkörper ist. Weiter erhält man u. a.: Bei einem streng semiprimären Ring \mathfrak{R} sind zwei Idempotente e_1, e_2 dann und nur dann isomorph, wenn ihre Restklassen \bar{e}_1, \bar{e}_2 in $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}/\mathfrak{r}_a$ isomorph sind. Bei einem streng semiprimären Ring \mathfrak{R} mit Haupteinheit 1 ist a dann und nur dann regulär, wenn a in \mathfrak{R} regulär ist, und es wird \mathfrak{r}_a sowohl gleich dem Durchschnitt aller maximalen zweiseitigen als auch gleich dem Durchschnitt aller maximalen Linksideale. — Im dritten Abschnitt untersucht Verf. gewisse Moduln, deren Endomorphismenringe semiprimär sind. Er kommt so vor allem zu einer Charakterisierung der „geschlossenen semiprimären“ Ringe, d. h. der semiprimären Ringe \mathfrak{R} , die den folgenden Zusatzbedingungen genügen: 1. Die Summe \mathfrak{z} aller minimalen zweiseitigen, nicht ausschließlich aus Wurzelementen bestehenden Ideale läßt sich als direkte Summe von direkt unzerlegbaren Linksidealien darstellen. 2. \mathfrak{R} ist der Endomorphismenring des Linksideals \mathfrak{z} . Man erhält u. a. die Sätze: Ein Ring von spaltensummbaren Matrizen über einem geschlossenen semiprimären Ring ist stets selbst geschlossen semiprimär. \mathfrak{R} ist dann und nur dann geschlossen primär, wenn \mathfrak{R} als Ring von spaltensummbaren Matrizen über einem vollständig primären Ring mit Haupteinheit 1 dargestellt werden kann. (Über gewisse Lücken in der Herleitung und die Möglichkeit, sie auszufüllen, vgl. das unmittelbar folgende Referat.) — Zum Schluß ein Wort zur Terminologie! Es dürfte vielleicht zweckmäßig sein, in den Definitionen überall „primary“ durch „local“ zu ersetzen, also statt von „primären Ringen“ von „Stellenringen“ zu reden. Denn im kommutativen Fall besitzt ein Integritätsbereich J dann und nur dann ein Azumayaradikal \mathfrak{r}_a (und ist damit gleichzeitig vollständig primär), wenn in J die Menge aller Nichteinheiten ein Ideal bildet, wenn also J im gebräuchlichen Wortsinn ein Stellenring ist. Dagegen braucht J keineswegs im Sinne der kommutativen Terminologie „primär“ zu sein, d. h. es braucht keineswegs in J nur ein einziges von (0) verschiedenes Primideal zu existieren.

Wolfgang Krull.

Azumaya, Gorô: Corrections and supplementaries to my paper concerning Krull-Remak-Schmidt's theorem. Nagoya math. J. 1, 117—124 (1950).

Die vorliegende Note ist eine Berichtigung zu der soeben besprochenen Arbeit, die weiterhin kurz mit K.-R.-S. zitiert wird. Verf. betrachtet einen Modul \mathfrak{M} , der als direkte Summe einer endlichen oder unendlichen Menge von Untermoduln m_μ dargestellt ist. Von dem Endomorphismenring \mathfrak{R}_μ jedes einzelnen m_μ wird vorausgesetzt, daß \mathfrak{R}_μ im Sinne von K.-R.-S. vollständig primär ist, d. h. daß die Summe zweier eigentlichen (nicht eindeutig umkehrbaren) Endomorphismen von m_μ stets selbst wieder eigentlicher ist. Für den Summenmodul \mathfrak{M} werden unter dieser Annahme drei Sätze bewiesen, die einen vollwertigen Ersatz für die im dritten Teil von K.-R.-S. formulierten, nicht ganz einwandfreien Theoreme 19 und 20 bilden. Damit sind die wichtigsten Resultate des dritten Teils von K.-R.-S., insbesondere die in der Besprechung ausdrücklich hervorgehobenen Sätze, endgültig gesichert.

Wolfgang Krull.

Peremans, W.: The radical of a ring. Math. Centrum, Amsterdam, Rapport ZW 1950—013, 11 p. (1950) [Holländisch] (hektographiert).

Verf. behandelt zunächst ausführlicher die Stellung des Radikals in der Artinschen Theorie der nichtkommutativen Ringe mit Doppelkettensatz. Den Abschluß

Dieses ersten Teils bildet ein Beweis des 1938 von C. Hopkins gewonnenen Satzes, daß die Nilpotenz der Summe aller (zweiseitigen) nilpotenten Ideale schon aus der Minimalbedingung allein folgt. Im zweiten Teil werden die neueren Verallgemeinerungen der klassischen Radikaldefinition besprochen. (Radikal im Sinne Koethes, Baers, Levitzkys, Jacobsons, sowie im Sinne von Brown und McCoy.) Den Schluß bilden einige Überlegungen zu der folgenden, bisher in voller Allgemeinheit noch nicht beantworteten Frage: Enthält die Summe aller zweiseitigen Nilideale immer alle Links-Nullideale? (Dabei ist ein Nilideal — im Gegensatz zum nilpotenten Ideal — einfach dadurch charakterisiert, daß alle seine Elemente nilpotent sind).

Wolfgang Krull.

Rédei, L. und T. Szele: Die Ringe „ersten Ranges“. Acta sci. math., Szeged 12 A. L. Fejér et F. Riesz LXX annos natis dedic., 18—29 (1950).

Eine abelsche Gruppe heißt vom Range 1, wenn je zwei von der Identität verschiedene zyklische Untergruppen einen nicht trivialen Durchschnitt haben, ferner lokal-zyklisch, wenn je zwei ihrer Elemente eine zyklische Untergruppe erzeugen. Die völlig bekannte und erneut abgeleitete Theorie dieser Gruppen wird dazu benutzt, eine Klassifikation der Ringe vom Range 1 bzw. der lokal-zyklischen Ringe anzugeben, d. h. der Ringe, deren additive Gruppe den Rang 1 hat bzw. lokal-zyklisch ist. Da zu jeder beliebigen Gruppe ein Zeroring existiert, d. h. ein Ring, in dem das Produkt zweier beliebiger Elemente 0 ist und dessen additive Gruppe mit der vorgegebenen übereinstimmt, zählen wir im folgenden diese trivialen Ringe nicht mehr auf. Sämtliche Ringe vom Range 1 sind dann die bekannten Unterringe des rationalen Zahlkörpers und für jede Primzahlpotenz p^e noch e Ringe, deren additive Gruppe eine zyklische Gruppe der Ordnung p^e ist — darunter der Restklassenring mod. p^e . Der lokal-zyklische Fall läßt sich dann auch sehr schnell erledigen, da nur noch direkte Summen bereits aufgezählter Ringtypen hinzutreten.

Helmut Ulm.

Herstein, I. M.: A proof of a conjecture of Vandiver. Proc. Amer. math. Soc. 1, 370—371 (1950).

Es wird die folgende von Vandiver ausgesprochene Vermutung (dies. Zbl. 33, 152), die eine Verallgemeinerung des Wedderburnschen Satzes darstellt, bewiesen: Ein endlicher Ring ist kommutativ, wenn alle Nullteiler im Zentrum liegen. Außerdem wird die folgende Verallgemeinerung bewiesen: Erzeugt jedes Element eines Ringes einen endlichen Teilring, so ist der Ring kommutativ, wenn alle Nullteiler im Zentrum liegen.

Helmut Ulm.

Mullender, P.: Divisibility properties. Math. Centrum, Amsterdam, Rapport ZW 1950—017, 4 p. (1950) [Holländisch].

Verf. referiert über bekannte elementare Teilbarkeitseigenschaften in Integritätsbereichen mit 1-Element, in denen der Restklassenring nach jedem Element endlich ist.

Hendrik Douwe Kloosterman.

Corput, J. G. van der: Le théorème fondamental de l'algèbre. Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. Nr. 24 (Algèbre et théorie des nombres, Paris 25. 9.—1. 10. 1949), 11—18 (1950).

Verf. konstruiert zu einem vorgegebenen kommutativen Körper I' ohne Benutzung der Irreduzibilität von Polynomen (die für nichtabzählbare Körper nicht in endlich vielen Schritten entschieden werden kann) einen kommutativen, algebraisch abgeschlossenen, algebraischen Erweiterungskörper K . Statt des Irreduzibilitätsbegriffes wird der größte gemeinsame Teiler von Polynomen benutzt. Falls I' ein Körper im intuitionistischen Sinne ist (d. h. falls I' abzählbar ist und von je zwei Elementen a und b in I' in endlich vielen Schritten entschieden werden kann, ob sie gleich oder ungleich sind), so ist auch K ein Körper im intuitionistischen Sinne. Verf. gibt weiter an, wie man zu einem vorgegebenen geordneten kommutativen Körper I' (ebenfalls ohne Benutzung des Irreduzibilitätsbegriffes) einen

kommutativen Erweiterungskörper Ω konstruieren kann, derart, daß $\Omega(i)$ algebraisch und algebraisch abgeschlossen ist. Falls Γ ein Körper im intuitionistischen Sinne ist, so gilt dasselbe für Ω und $\Omega(i)$. Auch in dem Falle, daß Γ nicht abzählbar ist, ist jedes Element von $\Omega(i)$ in endlich vielen Schritten konstruierbar. Dabei braucht Γ nicht archimedisch geordnet zu sein. Die Konstruktion von Ω läßt sich sogar in derselben Weise durchführen, wenn man Γ nur als bewerteten Körper voraussetzt [vergl. auch J. G. van der Corput, Proc. Akad. Wet., Amsterdam **49**, 722—732, 878—886, 985—994 (1946); sowie dies. Zbl. **39**, 11]. *H. D. Kloosterman.*

Skornjakov, L. A.: Zur Theorie der Alternativkörper. Uspechi mat. Nauk, Moskva **5**, Nr. 5 (39), 160—162 (1950) [Russisch].

Verf. schließt sich an die Untersuchungen von R. Moufang über die Struktur von Alternativkörpern an [Math. Ann. **110**, 416—430 (1934); dies. Zbl. **10**, 4] und stellt neue Sätze über assoziative Untersysteme auf. *H. Brandt.*

●**Steinitz, E.:** Algebraische Theorie der Körper. New York: Chelsea 1950. 176 p. and 1 plate.

Zahlkörper:

Hasse, Helmut: Die Einheitengruppe in einem total-reellen nicht-zyklischen kubischen Zahlkörper und im zugehörigen bikubischen Normalkörper. Miscell. acad. Berolin. **1**, 1—24 (1950).

Eine vorläufige Mitteilung des Verf. über die Ergebnisse dieser Arbeit s. dies. Zbl. **31**, 9. Hier werden jetzt die Beweise gegeben. Es sei K ein totalreeller nicht-zyklischer kubischer Zahlkörper und B der zugehörige bikubische Normalkörper mit der Galoisgruppe \mathfrak{G} , die die erzeugenden Relationen $S^3 = 1$, $T^2 = 1$, $TS = S^2T$ hat. Es bezeichne L den sechsdimensionalen Logarithmenraum von B , der aus den Punkten mit den Koordinaten $\log |A^P|$ besteht, wo A die Elemente der aus B durch Erweiterung des rationalen Koeffizientenkörper P zum reellen Zahlkörper entstehenden galoisschen Algebra vom Range 6 mit der Gruppe \mathfrak{G} sind und P die Automorphismen von \mathfrak{G} durchläuft. Die Einheiten H^* von B liegen in der fünfdimensionalen Hyperebene E^* aus L , gegeben durch $\sum_P \log |A^P| = 0$. Die Relativeinheiten H mit $N_\Omega'(H) = 1$, wo Ω den quadratischen Teilkörper von B bezeichnet, liegen in der vierdimensionalen Hyperebene E aus L , gegeben durch $\sum_{\nu \bmod 3} \log |A^{S^\nu}| = 0$.

$\sum_{\nu \bmod 3} \log |A^{S^\nu T}| = 0$. E ist Darstellungsmodul von \mathfrak{G} . E liefert ferner die reguläre Darstellung des zerfallenden quadratischen hyperkomplexen Systems \mathfrak{S} mit den erzeugenden Relationen $1 + S + S^2 = 0$, $T^2 = 1$, $TS = S^2T$ über P , und E selbst ist dann isomorph zu der als \mathfrak{S} -modul betrachteten Erweiterung $\tilde{\mathfrak{S}}$ des Systems \mathfrak{S} auf den reellen Zahlkörper \bar{P} . Der Isomorphismus zwischen E und $\tilde{\mathfrak{S}}$ wird vermittelt durch eine geeignete Zahl θ aus B mit $N_\Omega(\theta) = 1$, für welche θ , θ^S , θ^{ST} eine Basis von E liefern. Die Zuordnung $\theta^X \rightarrow X$ vermittelt den Isomorphismus. Dem Relativeinheitengitter H in E entspricht ein reguläres \mathfrak{S} -Rechtsideal \mathfrak{E} in \mathfrak{S} , wo \mathfrak{S} die Ordnung der ganzzahligen Linearkombinationen aus der Basis $1, S, T, ST$ ist. Entweder ist \mathfrak{E} ein Hauptideal, d. h. es gibt ein reguläres Element A aus \mathfrak{E} , so daß $\mathfrak{E} = A\mathfrak{S}$, oder \mathfrak{E} ist ein Hauptideal einer eindeutig bestimmten Hauptordnung \mathfrak{D} zu \mathfrak{S} , d. h. es ist $\mathfrak{E} = A\mathfrak{D}$. Setzt man $E = \theta^A$, ist dann im ersten Falle $H = E^X$ mit X aus \mathfrak{S} . Im zweiten Falle hat man $[A\mathfrak{D}:A\mathfrak{S}] = 3$. Dann erhält man alle Relativeinheiten von B/Ω in der Form $H = E^X \hat{E}^X$ mit $E = \theta^A$, X aus \mathfrak{S} , wobei \hat{E} die dem Element $A \frac{1}{\sqrt{-3}} (1 + \sigma T)$ ($\sigma = \pm 1$ eindeutig bestimmt) aus \mathfrak{E} bei dem genannten Isomorphismus zugeordnete Relativeinheit von B/Ω ist. Nachdem die Relativeinheitengruppe H von B/Ω bestimmt ist, erhält man sofort die Einheitengruppen H^* von B/P und H_0 von K/P . *H. Bergström.*

Châtelet, François: Points exceptionnels des cubiques. Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. Nr. 24 (Algèbre et théorie des nombres, Paris 25. 9.—1. 10. 1949), 71—72 (1950).

Let A, B be in an algebraic number-field k . Then a point (x, y) on $y^2 = x^3 + Ax + B$, where $x, y \in k$ is exceptional if its parameter is commensurable with the periods in the usual Weierstrassian parametrization. The author discusses recent work, particularly his own application of p -adic analysis. This shows, e. g., that the set of exceptional points is finite and can be effectively determined. [Ann. Univ. Lyon 10, 5—22 (1947); C. r. Acad. Sci., Paris 210, 90—92 (1940), this Zbl. 23, 106]. Previously this was known only for rationals. *J. W. S. Cassels.*

Zahlentheorie:

Grotting, Ole: Magische Quadrate. Norsk mat. Tidsskr. 31, 104—109 (1949) [Norwegisch].

Moessner, Alfred: Some diophantine problems with their solutions. Simon Stevin, wiss. natuurk. Tijdschr. 27, 196—200 (1950).

Thomas, J. M.: The linear diophantine equation in two unknowns. Math. Mag., Pacoima, Calif., 24, 59—64 (1950).

Verf. entwickelt eine Methode, um die allgemeine Lösung und vor allem die Lösung von $ax + by = c$ (a, b, c natürliche Zahlen), für welche $x^2 + y^2$ ein Minimum ist, direkt zu bestimmen, also ohne den Umweg über $ax + by = 1$ zu nehmen. Dazu wird die Gleichung in der Gestalt $D = c$ angeschrieben, wo D jene zweizeilige Determinante ist, deren erste Zeile $x, -b$, deren zweite Zeile y, a ist. Sind die ganzen Zahlen in der zweiten Spalte dem Betrage nach verschieden, so wird die Zeile, welche die kleinere dieser beiden Zahlen enthält, zur anderen Zeile hinzuaddiert. Nach endlich vielen Schritten nimmt D die Gestalt $\begin{vmatrix} px + qy, -d \\ rx + sy, d \end{vmatrix}$ an. Dann muß, wenn $ax + by = c$ lösbar sein soll, $ps - qr = 1$ sein, und die allgemeine Lösung lautet $x = su - qv$, $y = -ru + pv$, wo $u + v = c$ ist (u, v sonst beliebig). Ist weiter x, β der Fußpunkt der Normalen von $(0, 0)$ auf die Gerade $ax + by = c$, dann ist eine kleinste Lösung im obigen Sinne: $x = su - qv$, $y = -ru + pv$, $u = \{p\alpha + q\beta\}$, $v = \{r\alpha + s\beta\}'$, wo $\{\xi\}$ die kleinere, $\{\xi\}'$ die größere der nächsten ganzen Zahlen an ξ ist. Eine weitere kleinste Lösung ist dann und nur dann vorhanden, wenn $px + q\beta$ die Hälfte einer ungeraden Zahl ist, und man erhält sie, wenn man bei den obigen u, v den Strich jetzt bei u und nicht bei v setzt. Zum Schluß wird noch der Zusammenhang mit der Theorie der Kettenbrüche festgestellt.

Edm. Hlawka.

Verdenius, W.: Über verallgemeinerte Gauß'sche Summen. Handel. XXXIe Nederlands natuur- en geneesk. Congr., Groningen 1949, 93—94 (1949) [Holländisch].

Verf. behauptet (ohne Beweis), daß die Anzahl der Lösungen einer quadratischen Kongruenz $\psi(y_1, y_2, \dots, y_s) \equiv t \pmod{p^\alpha}$ (mit ganzzahligen Koeffizienten, p eine Primzahl), falls sie überhaupt eine Lösung besitzt und $s \geq 4$ ist, größer als $Cp^{(s-1)\alpha}$ ist. Vorausgesetzt ist dabei, daß die Determinante des quadratischen Teiles des Polynoms ψ (das auch lineare Glieder enthalten darf) nicht verschwindet.

Hendrik Douwe Kloosterman.

Chih, Tsung-Tao: A divisor problem. Sci. Record, Acad. Sinica 3, 177—182 (1950).

By the method of Selberg [Arch. Math. Naturv., Oslo, B 47, Nr. 6 (1943); this Zbl. 28, 348] the author proves the following result: Let $\Phi(x)$ be a positive and increasing function, $\Phi(x)/x$ decreasing to zero and $\Phi(x)/\log x$ tends to ∞ as $x \rightarrow \infty$. — Let $R(x) = \sum_{uv \leq x, u > 0, v > 0} 1 - x \log x + (2C - 1)x$ where C is the

Euler's constant. Then we have $R(x + \Phi(x)) - R(x) = o(\Phi(x))$, except for a set of measure $m(x) = o(x)$ as $x \rightarrow \infty$.

Loo-Keng Hua.

Turán, Paul: On the remainder-term of the prime-number formula. I. Acta math. Acad. Sci. Hung. **1**, 48—63 und russische Zusammenfassg. 63 (1950).

Für natürliches n sei $A(n) = \log p$, wenn n Potenz einer Primzahl p ist, und $A(n) = 0$ für die übrigen n . Nach Diskussion der über $A(x) = \sum_{n \leq x} A(n) - x$ von Phragmén, Erhard Schmidt und Littlewood gewonnenen Ergebnisse beweist Verf.

$$\max_{1 \leq x \leq T} |A(x)| > T^{\beta_0} |\varrho_0|^{-10 \log T / \log \log T} e^{-c_1 \log T / \log \log T / \log \log T}$$

für $T > T_0$. Dabei ist $\varrho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ eine willkürliche Nullstelle $\neq -2n$ von $\zeta(s)$, und c_1, T_0 hängen in explizit angebbare Weise von ϱ_0 ab. Zum Beweis wird

das Integral $\int_{1+\eta-iU}^{\xi^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(n)-1}{n^s} ds$ mit von T abhängigen positiven

η, U, ξ und natürlichem $k = k(T)$ herangezogen und ein von dem Verf. früher (dies. Zbl. **29**, 395) bewiesenes Lemma benutzt: Bei $n \leq N, m \geq 28N$ gilt für komplexe z_1, \dots, z_n mit $\max_{\nu=1, \dots, n} |z_\nu| \geq 1$ die Ungleichung

$$\max_{m \leq \nu \leq m+N} |z_1^\nu + \dots + z_n^\nu| \geq \frac{1}{N^2} \left(\frac{N}{e^{27} m} \right)^N.$$

B. Schoeneberg.

Corput, J. G. van der: Über die Gesetzmäßigkeit großer Zahlen. Handel XXXIe Nederlands natuur- en geneesk. Congr., Groningen 1949, 36—51 (1949) [Holländisch].

In the first part of this address the author describes asymptotic properties of the distribution of prime numbers and Goldbach's conjecture. The second part deals with asymptotic expansions of functions. The paper does not contain any new results, but it is written in a light vein and makes pleasant reading.

Stefan Vajda.

Schneider, Theodor: Über einen Blichfeldtschen Satz aus der Geometrie der Zahlen. Arch. Math., Karlsruhe **2**, 349—353 (1950).

Blichfeldt teilt in seiner grundlegenden Arbeit [Trans. Amer. math. Soc. **15**, 227—235 (1914)] den R_n der Punkte \mathfrak{z} in Fundamentalparallelepiped \mathfrak{M} ein. In jedem \mathfrak{M} seien k ($k \geq 1$, fest) beliebige Punkte P gegeben, die Gitterpunkte heißen. Das Volumen von \mathfrak{M} sei I . Ist nun \mathfrak{K} eine beschränkte, offene, stetig zusammenhängende n -dimensionale Punktmenge in R_n mit äußerem Volumen V und ist $\varepsilon > 0$, so kann man \mathfrak{K} durch eine passende Translation stets in eine solche Lage bringen, daß die Anzahl A der Gitterpunkte, die innerhalb \mathfrak{K} oder innerhalb einer ε -Umgebung eines Randpunktes von \mathfrak{K} liegen, größer als Vk/I ist. Die vorliegende Arbeit enthält eine Verallgemeinerung. Es wird auf \mathfrak{K} eine Belegungsfunktion $b(\zeta) \geq 0$ angenommen, ferner sei $\varphi(\mathfrak{z}) \geq 0$ im R_n definiert. Beide Funktionen sollen gewissen Integrationsbedingungen genügen. Ist

$$A(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mathfrak{z}) b(\zeta + \mathfrak{z}) d\mathfrak{z}, \quad V = \int_{-\infty}^{\infty} b(\zeta) d\zeta, \quad \varrho = \lim_{w \rightarrow \infty} \left(w^{-n} \int_{\mathfrak{W}} \varphi(\mathfrak{z}) d\mathfrak{z} \right),$$

wobei \mathfrak{W} einen n -dimensionalen Würfel der Kantenlänge w bedeutet, so wird gezeigt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\zeta = \zeta_0$, so daß $A(\zeta_0) > \varrho V - \varepsilon$. Im Blichfeldtschen Satz ist $b(\zeta) = 1$ auf \mathfrak{K} , V das Volumen von \mathfrak{K} , $A(\zeta)$ die Anzahl der Gitterpunkte in dem um den Vektor $-\zeta$ verschobenen Körper \mathfrak{K} und $\int_{\mathfrak{W}} \varphi(\mathfrak{z}) d\mathfrak{z}$ die Anzahl der Gitterpunkte in \mathfrak{W} . Dem Sonderfall des Blichfeldtschen Satzes, daß die k Gitterpunkte P in allen \mathfrak{M} kongruente Lage haben, entspricht eine in kongruenten \mathfrak{M} periodische Funktion $\varphi(\mathfrak{z})$. Dann gibt es in jedem \mathfrak{W} stets ein ζ_0 , für das $A(\zeta_0) \geq \varrho V/w^n$ ist. Die Beweise sind kurz und rein analytisch. *N. Hofreiter.*

Walfisz (Val'fiš), A. Z.: Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. XIV. Akad. Nauk Gruzinskoi SSR, Trudy Tbilissk. mat. Inst. Razmadze 17, 245—257 und grusinische Zusammenfassg. 258 (1949) [Russisch].

Let $r_{2k}(n)$ be the number of representations of n as the sum of $2k$ squares and let $A_{2k}(x) = 1 + \sum_{n \leq x} r_{2k}(n)$. The author has given two proofs of an estimate for $A_{2k}(x)$ for $k \geq 4$ with error term $O(x^{k-3/2})$ [Akad. Nauk Gruzinskoi SSR, Trudy Tbilissk. mat. Inst. 15, 275—296 (1947), 16, 215—230 (1948)]. Here he gives a third proof depending on the transformation of an estimate of Jarník [Math. Z., Berlin 30, 768—786 (1929)] itself based on one of Landau [Math. Z., Berlin 21, 126—132 (1924)]. The proof is very complicated. For $k \geq 6$ a stronger estimate has since been given by a similar method (this Zbl. 39, 40). J. W. S. Cassels.

Raisbeck, Gordon: Simultaneous diophantine approximation. Canadian J. Math. 2, 283—288 (1950).

Nach einigen allgemeinen Ausführungen, welche (sogar in schärferer Gestalt) aus der Geometrie der Zahlen folgen, zeigt der Verf. folgende Verschärfung des Dirichletschen Approximationssatzes: Sind z_1, \dots, z_n, t ganz, vorgegeben, dann gibt es ein $q \geq 1$ ganz mit $q \leq t^{n-1}(t-1) - 2^{n-1} + 1$ und ganze p_1, \dots, p_n , so daß $|qz_j - p_j| \leq 1/t$ ($j = 1, \dots, n$). Diese Schranke ist scharf. N. Pipping [Acta Acad. Aboensis 13, Nr. 9, 1—12 (1942); dies. Zbl. 26, 204] hatte dies früher nur mit $q \leq t^n - 2^n + 1$ gezeigt. Edm. Hlawka.

Analysis.

Allgemeines:

• Oldenburger, Rufus: Mathematical engineering analysis. New York: Macmillan Co. 1950. VIII, 426 p. \$ 6.00.

Verf. will die mathematische Einkleidung technisch-physikalischer Probleme zum Kern seiner Darstellung machen und die Kunst des Mathematischen Ansatzes lehren. Er führt dazu eine große Zahl von Beispielen vor, die nach den Gebieten der klassischen theoretischen Physik angeordnet werden, aber vielfach mehrere Gebiete verknüpfen. Er will dabei den Standpunkt des Forschers im Industrielaboratorium mit dem des Mathematikers zum Ziele einer maximum efficiency verbinden. Zweifellos trifft Verf. mit seiner Absicht eine der empfindlichen und höchst wichtigen Stellen an der Grenze zweier Hauptgebiete der modernen Naturwissenschaft, ja an der Grenze zweier Arten, zu denken. Diese Grenze bedarf besonderer Pflege und Sorgfalt, was gern und selbstverständlich anerkannt wird; Verf. hat viele Einzelzüge zusammengetragen, die hierzu erforderlich sind. — Gleichwohl kann Ref. den Versuch im Ganzen nicht als gelungen ansehen. Verf. verharrt zu sehr im Formalen; er dringt weder dazu vor, die Ansätze aus den großen Zügen der physikalisch-technischen Seite durchsichtig zu machen, noch führt er sie bis an das Wesen der mathematischen Methode heran. Insbesondere vermissen wir die Bildung der Urteilskraft des Lesers in bezug auf den Wert formaler „mathematischer“ Ansätze. Jede eigne Überzeugung kann nur an eigener Arbeit reifen. Gerade die aber wird zu kurz gehalten. Dafür scheint uns ein Leitsatz typisch, den Verf. an der Spitze der Sammlungen vieler Aufgaben immer wiederholt, wie sie jeden der Hauptabschnitte abschließen: „The reader is expected to set up a mathematical equivalent for the physical systems described. He is not expected to solve the equations obtained“. Wie soll jemand den Wert seines Tuns beurteilen lernen, dem nicht zugemutet wird, aus seinem Ansatz eine Lösung herauszuholen und sie der Prüfung zu unterwerfen? Man vergleiche dazu etwa als Beispiel: Eine Differentialgleichung der Form $aT'' + bT^4 + cT + d = 0$ (Abkühlung flüssigen Eisens in offenem Behälter; $T = \text{abs. Temperatur}$) wird linearisiert „indem man einfach $T^3 = \text{const.}$ setzt“. Geht Verf. damit nicht weiter, als man es — ohne Erläuterung — einem Lernenden vorsetzen dürfte!? — So wie dem Mathematiker Beispiele aus der Technik (von Maschinenelementen bis zu technischen Großanlagen) in Bildern gezeigt werden, die den Techniker zum Widerspruch reizen — so werden dem Techniker manche hübsche Formeln präsentiert, auf samtlichen Kissens, wie im Museum („Man bittet, die ausgestellten Gegenstände nicht zu berühren“). — Nützt und lehrt es, Vieles zu zeigen? Einiges bis zum Letzten tun, das führt wohl weiter. Non multa — sed multum! Das war Gaußens Leitspruch! Egon Ullrich.

Koksma, J.: Rund um den Funktionsbegriff. Euclides, Groningen 25, 313—340 (1950) [Holländisch].

Es geht um die Didaktik der Einführung des Funktionsbegriffes auf der höheren Schule. Im Mittelpunkt steht die Anregung des Verf., die „dynamische“ Definition, nach der die Funktion $y = f(x)$ hinauskommt auf eine „Kurve“, die „durchlaufen“ wird, gar nicht erst zu erwähnen, sondern von Anfang an x aufzufassen als eine Größe, die verschiedener Werte fähig ist, welche gleichberechtigt nebeneinander stehen. Die erstere Definition mag zunächst anschaulicher und suggestiver erscheinen, sie führt aber später auf begriffliche Schwierigkeiten, so wenn in dem gleichen Ausdruck bald die eine, bald die andere Größe die Rolle einer „Veränderlichen“ spielt, wie auch später bei einer strengen Begründung der Infinitesimalrechnung.

Gerrit Bol.

Mengenlehre:

Novák, J.: A paradoxical theorem. Fundamenta Math., Warszawa 37, 77—83 (1950).

Es wird der folgende Satz bewiesen: Es bedeuten B , B_1 und A Mengen mit Ordnungszahlen der ersten und zweiten Zahlenklasse als Elementen. B sei nicht abzählbar und abgeschlossen. $f(x)$ bilde die Elemente von B auf die einer Menge A ab; sei ferner $f(x) < x$. Dann gibt es eine Ordinalzahl $\alpha \in A$ und eine nicht abzählbare Menge $B_1 \subset B$, so daß $f(x) = \alpha$ für alle $x \in B_1$. — Dieser Satz wird benutzt, das folgende, paradox anmutende Theorem zu beweisen: Von einer unendlichen abzählbaren Menge A_0 werde ein Element fortgenommen, zum Rest eine neue unendliche, abzählbare Menge A_1 hinzugefügt, dann mit der zuletzt entstandenen Menge dieses Verfahrens wiederholt und so immer wieder, nicht nur endlich oft, sondern auch durch Iterierung nach den Ordnungszahlen. Es gibt dann eine Zahl der zweiten Zahlenklasse, so daß, wenn die Iteration bis dahin vorgenommen wird, die Menge aller ursprünglich gegebenen und hinzugefügten Elemente dieselbe ist wie die Menge aller fortgenommenen Elemente. — Im übrigen wird der zuerst angeführte Satz noch dazu benutzt, hinreichende und notwendige Bedingungen dafür anzugeben, wann ein geordnetes Kontinuum mit der Suslinschen Eigenschaft (für das also jedes disjunkte System von Intervallen abzählbar ist) eine lineare Menge ist.

Wilh. Ackermann.

Differentiation und Integration reeller Funktionen:

Cassina, Ugo: Il concetto di linea piana e la curva di Peano. Riv. Mat. Univ. Parma 1, 275—292 (1950).

Article didactique qui, après un bref rappel des idées des Anciens sur la notion de ligne et des tentatives du 19^e siècle pour la préciser, est essentiellement consacré à la courbe de Peano (expression analytique, représentation graphique, propriétés simples).

André Revuz.

Stampacchia, Guido: Criteri di compatezza per gli insiemi di funzioni continue rispetto alle variabili separatamente. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 19, 201—213 (1950).

A sequence (1) $f_n(x, y)$, $(x, y) \in Q \equiv [0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1]$, $n = 1, 2, \dots$, of single valued real functions is said to be convergent almost uniformly and regularly in Q if, for any $\varepsilon > 0$, there exists a subset $I \subset Q$ whose projections I_x, I_y on the axes x and y have both measures less than ε , and $f_n(x, y)$ converges uniformly in $Q - I$. The author proves the following statement: If the functions $f_n(x, y)$ are i) equally bounded in Q , ii) absolutely continuous as functions of y for almost all x ; iii) absolutely continuous as functions of x for almost all y ; iv) if there are two positive numbers α, A such that $\iint_Q [|p_n|^{1+\alpha} + |q_n|^{1+\alpha}] dx dy \leq A$, $p_n = \partial f_n / \partial x$,

$q_n = \partial f_n / \partial y$, $n = 1, 2, \dots$; then the sequence (1) converges almost uniformly and regularly in Q .

Lamberto Cesari.

Dieudonné, Jean: Sur un théorème de Jessen. *Fundamenta Math.*, Warszawa **37**, 242—248 (1950).

Es sei I das Intervall $[0, 1]$, $P = I^N$ das Cartesische Produkt abzählbar vieler Intervalle $I_n = I$ und μ das als Produkt der Lebesgueschen Maße auf den I_n erklärte Maß auf P . Ist J, J' eine komplementäre Zerlegung der Menge N der natürlichen Zahlen, so wird $P = I^J \times I^{J'}$, $x = (x_J, x_{J'})$ für ein Element von P , ebenso wird μ das Produkt der $\mu_J, \mu_{J'}$ auf I^J bzw. $I^{J'}$. Ist $f(x)$ eine auf P erklärte, bezüglich μ summierbare Funktion, so ist die Funktion $f_J(x_J) = \int_{I^{J'}} f(x_J, x_{J'}) d\mu_{J'}$

fast überall in I_J erklärt und dort summierbar. Setzt man allgemein $f_J(x) = f_J(x_J)$, so ist f_J auf ganz P fast überall erklärt und dort summierbar. Nach einem Satz von B. Jessen [vgl. *Acta math.* **63**, 249—323 (1934); dies. Zbl. **10**, 200] konvergieren für eine wachsende Folge endlicher J_n mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n = N$ die Funktionen $f_{J_n}(x)$ auf P fast überall gegen $f(x)$. Es wird durch ein Gegenbeispiel gezeigt, daß es jedoch nicht immer eine feste Teilmenge Q von P vom Maß Null gibt, so daß zu jedem $x \in P - Q$ eine endliche Teilmenge $J_0(x, \varepsilon)$ von N gehört mit $|f_J(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ für alle $J \supset J_0$.

Gottfried Köthe.

Areškin, G. Ja.: Über den Grenzübergang unter dem Integralzeichen beim Lebesgue-Radonschen Integral. *Soobščenijsa Akad. Nauk Gruzinskoi SSR* **10**, 69—76 (1949) [Russisch].

Über einem σ -Körper \mathfrak{G} , der eine Maximalmenge E enthält, sei eine nicht-negative volladditive Maßfunktion μ erklärt. Im folgenden sind alle auftretenden Funktionen $f, f_k(x)$ auf E definiert und \mathfrak{G} -meßbar. Ferner sei eine Folge von Maßfunktionen μ_k auf \mathfrak{G} definiert. Verf. verallgemeinert den Begriff der Konvergenz dem Maße nach: $f_k(x)$ heiße auf E dem μ_k -Maße nach konvergent gegen f (weiterhin einfach: asympt. konv.), wenn für beliebiges $\varepsilon > 0$ $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k \left\{ E \left[|f(x) - f_k(x)| \geq \varepsilon \right] \right\} = 0$.

Für das Folgende soll stets gelten, daß μ_k gegen μ konvergiert, ohne daß dies ferner ausdrücklich formuliert wird. Dann beweist Verf.: Wenn $\{f_k(x)\}$ gegen f konvergiert, ist $\{f_k(x)\}$ auch asympt. konv. (gegen f). [Die beiden folgenden Sätze verallgemeinern ein Ergebnis von Dubrovskij, *Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat.* **9**, 311—320 (1945), **11**, 101—104 (1947); dies. Zbl. **32**, 197.] $\{f_k(x)\}$ sei gleichmäßig beschränkt und asympt. konvergent gegen $f(x)$. Dann ist f μ -summierbar und für beliebiges meßbares H gilt

$$(1) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_H f_k(x) d\mu_k = \int_H f(x) d\mu.$$

Weiter: $\{f_k(x)\}$ sei μ -fast-überall konvergent gegen $f(x)$. Sind die Mengenfunktionen $\int_e f_k(x) d\mu_k$, $e \subset \mathfrak{G}$, absolut stetig, dann ist f μ -meßbar und es gilt (1). Für diese Sätze vgl. man Verf. (dies. Zbl. **39**, 53).

Leopold Schmetterer.

Ellis, H. W.: Examples of integrals that are discontinuous in sets of positive measure. *Trans. R. Soc. Canada, Sect. III, III*. S. **44**, 37—42 (1950).

Es gibt in der Literatur zahlreiche Modifikationen der Perronschen Integraldefinition, die die Klasse der Ober- und Unterfunktionen in gewisser Weise ausdehnen und dadurch viele nicht beschränkte Funktionen integrierbar machen, die es vorher nicht waren. Verf. zieht drei solche Erweiterungen heran, das AP - (Burkill), das β - (Ridder) und das GM_1 - (Ellis) Integral, und konstruiert eine Funktion $F(x)$, die nicht fast überall stetig, aber trotzdem in jedem der drei genannten Sinne ein unbestimmtes Integral einer Funktion $f(x)$ ist, während das ursprüngliche Perron-Integral von $f(x)$ nicht existiert.

O. Perron.

Pi Calleja, Pedro: Bogenlänge und Flächeninhalt. Univ. nac. Tucumán, Fac. Ci. exact. Tecnol., Rev., Ser. A 7, 157—242 (1950) [Spanisch].

Vorliegende Arbeit ist eine umfassende Darstellung der Ergebnisse, welche von verschiedenen Verfassern in den letzten Jahrzehnten auf dem Gebiet der Bogenlänge im Jordanschen Sinne und des Flächeninhalts im Lebesgue-Sinne erhalten wurden. Wenn auch keine Beweise gegeben werden, kann der Leser doch in einzelne Verfahren und die damit verknüpften Probleme Einblick gewinnen. Das Schwarzsche Beispiel, welches Lebesgues Untersuchungen beeinflusste, wird in allen Einzelheiten wiedergegeben. Tonellis Ergebnisse auf dem Gebiet der nicht parametrischen Flächen sowie das Projektionsprinzip und das Prinzip der Halbstetigkeit nach unten werden angeführt. Radós Untersuchung (Length and area, New York 1948, dies. Zbl. 33, 170), welche an die Banachschen anknüpft, wird auszugsweise wiedergegeben. Ausführlich werden die Ergebnisse des Ref. behandelt, die von Radós Buch ausgeschlossen bleiben mußten (notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine Fläche endlichen Lebesgueschen Flächeninhalt habe; die Gleichheit der verschiedenen Funktionen $G(\Phi)$, $U(\Phi)$, $T(\Phi)$, $W(\Phi)$, welche die Totalvariation einer ebenen Abbildung Φ darstellen; die Gleichheit der Flächeninhalte $G(S)$ und $L(S)$ einer Fläche S ; die Tangentialeigenschaften einer Fläche; die Lösung des Abbildungsproblems einer Fläche). Verf. stützte sich in der Gliederung des Materials auf eine Reihe von Vorlesungen, welche Ref. im „Institute for Advanced Study“ in Princeton gehalten hat. Die bibliographischen Angaben sind exakt und vollständig. Es wäre vielleicht wünschenswert gewesen, die Hinweise auf Carathéodorys Begriffe eingehender zu behandeln.

Lamberto Cesari.

Cecconi, Jaurès: Una proprietà caratteristica delle trasformazioni assolutamente continue. Riv. Mat. Univ. Parma 1, 433—438 (1950).

L. Cesari ha introdotto, una decina di anni fa [Ann. Scuola norm. sup. Pisa, II. S. 10, 91—101 (1941); questo Zbl. 25, 313; Atti Accad. Italia, Mem. Cl. Sci. fis. mat. natur., VII. S. 13 (1943)] i concetti di trasformazione piana continua „a variazione limitata“ e „assolutamente continua“ che permettono di caratterizzare rispettivamente le superficie ad area finita secondo Lebesgue e quelle la cui area, supposta finita, è espressa dall'integrale classico. Precedentemente, Vitali [Fundam. Math., Warszawa 8, 175—188 (1926)] e Banach [Fundam. Math., Warszawa 7, 225—236 (1925), 8, 166—172 (1926)] avevano introdotto, quale diretta generalizzazione del concetto di funzione di una variabile „a variazione limitata“ e „assolutamente continua“, i concetti di trasformazione piana continua „a variazione limitata“ e „assolutamente continua“ e Banach aveva dimostrato che vale la proprietà caratteristica, già osservata dal Levi [Atti. R. Accad. Lincei, V. S. 15, 433—438, 551—558, 674—684 (1906)] per le funzioni di una variabile, espressa dal Teorema: Condizione necessaria e sufficiente perchè una trasformazione piana continua „a variazione limitata“ secondo Banach, sia „assolutamente continua“ secondo Banach è che essa trasformi ogni insieme di punti di misura nulla in un insieme di punti pure di misura nulla. Il Ref. [Ann. Scuola norm. sup. Pisa, II. S. 12, 161—172 (1947)] dimostrò che per le trasformazioni continue piane „a variazione limitata“ e „assolutamente continue“ secondo Cesari, tale proprietà caratteristica non sussiste. L'A. prova che questa proprietà sussiste, quando ci si limiti ai punti che appartengono ai continui così detti essenziali. È da osservare che questo fatto è stato messo in luce anche dal Radó (questo Zbl. 33, 109) poco dopo che l'A. aveva enunciato il suo risultato in una comunicazione fatta al 3° Convegno dell'U. M. I., nel 1948, a Pisa.

Landolino Giuliano.

Warmus, Mieczysław: Sur l'évaluation des aires des régions planes à l'aide des réseaux de parallélogrammes. Časopis Mat. Fys., Praha 74, Nr. 4, 309—310 [Polnisch] und 310 [Französisch] (1950).

Koutský, Zdeněk: Intégrales de Fresnel généralisées. Časopis Mat. Fys., Praha 75, D 257—D 260 und französ. Zusammenfassg. D 261 (1950) [Tschechisch].
On calcule à l'aide du théorème de Cauchy sur les résidus les intégrales

$$\int_0^{\infty} \cos x^{2k} dx = \frac{\Gamma(1/2k)}{2k} \cos \frac{\pi}{4k}, \quad \int_0^{\infty} \sin x^{2k} dx = \frac{\Gamma(1/2k)}{2k} \sin \frac{\pi}{4k} \quad \left(k > \frac{1}{2}\right).$$

(Autoreferat.)

Bononcini, Vittorio E.: Sulle funzioni lipschitziane di due variabili. Riv. Mat. Univ. Parma 1, 449—457 (1950).

L'A. rileva, mediante i seguenti due esempi, che per una funzione $f(x, y)$ assolutamente continua (secondo Tonelli) la lipschitzianità in senso generalizzato di ordine α (lip. α) con $0 < \alpha < 1$, e l'integrabilità (secondo Lebesgue) L^β con $\beta > 1$ delle derivate parziali prime sono due proprietà del tutto indipendenti. — Siano h_n ($n = 1, 2, \dots$), r_n ($n = 1, 2, \dots$) due successioni di numeri reali positivi tali che sia $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ e che la serie $\sum_{n=1}^{\infty} h_n r_n$ risulti convergente; sia

$$C_n \equiv [(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2 \leq r_n^2] \quad (n = 1, 2, \dots)$$

una successione di cerchi appartenenti al quadrato $Q \equiv [0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1]$ e a due a due senza punti interni a comune, e si consideri la funzione così definita:

$$f(x, y) = h_n \left[1 - \left\{ \frac{(x - x_n)^2 + (y - y_n)^2}{r_n^2} \right\}^{\gamma/2} \right] \quad (\text{ove } 0 < \gamma < 1)$$

in ogni punto (x, y) appartenente ad almeno uno dei cerchi C_n ; $f(x, y) = 0$ in ogni altro punto di Q . — Allora se α e β sono due numeri reali con $0 < \alpha < 1$, $1 < \beta \leq 2$,

tali che la serie (1) $\sum_{n=1}^{\infty} h_n^\beta r_n^{2-\beta}$ sia convergente e che sia $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n/r_n^\alpha = +\infty$,

$f(x, y)$ è una funzione assolutamente continua che non è lip. α , ma le cui derivate parziali prime sono integrabili L^β . — D'altra parte, se α e β sono due numeri reali con $0 < \alpha < 1$, $1 < \beta$, tali che la serie (1) sia divergente e che la successione h_n/r_n^α ($n = 1, 2, \dots$) si mantenga limitata, $f(x, y)$ è una funzione assolutamente continua lip. α , ma le cui derivate parziali prime non sono integrabili L^β . S. Cinquini.

Fet, A. I.: Über die Bedingungen von Fomin für die eindeutige Umkehrbarkeit stetig differenzierbarer Abbildungen. Uspechi mat. Nauk, Moskva 5, Nr. 5 (39), 163—164 (1950) [Russisch].

A. M. Fomin hat (dies. Zbl. 35, 330) folgenden (l. c. ungenau wiedergegebenen) Satz bewiesen: Die Funktionen (1) $y_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n)$ ($i = 1, \dots, n$) seien auf dem konvexen Gebiet R des x -Raumes stetig differenzierbar, und in allen Punkten

von R sei die Form (2) $\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} u_i u_j$ im gleichen Sinne definit oder wenig-

stens semidefinit. Auf dem Teilgebiet $S \subset R$ sei die Funktionaldeterminante $\mathfrak{F} = \left\| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \right\| \neq 0$, und die Diskriminante der Form (2) $D = \left\| \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right) \right\|$ möge auf keinem Teilgebiet von S identisch verschwinden. Dann wird S vermöge (1) eineindeutig abgebildet. An den überaus einfachen Beweis hat er die Vermutung geknüpft, daß die Konvexitätsvoraussetzung bezüglich R rein technischer Natur sei. Demgegenüber belegt Verf. in der vorliegenden Note durch ein Beispiel, daß diese Voraussetzung tatsächlich wesentlich ist.

Hans Pietsch.

Pul'kin, S. P.: Oszillationsfolgen von Iterationen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 73, 1129—1132 (1950) [Russisch].

$f(x)$ sei für alle reellen x erklärt; man setze $f_0(x) = f(x)$, $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$ ($n = 1, 2, \dots$). Jeder Punkt x_0 gibt Anlaß zur Bildung einer Iterationsfolge $\{x_n\}$, $x_n = f_n(x_0)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Jeder Punkt ξ werde als Träger aller seiner (halb-offenen) rechts- bzw. linksseitigen Umgebungen als rechts- bzw. linksorientierter

Punkt angesehen. Ein orientierter Punkt ξ heißt Limespunkt (L. P.) einer Folge $\{x_n\}$, wenn in jeder seiner einseitigen Umgebungen unendlich viele x_n liegen. Ein isolierter L. P. heißt von 1. Klasse, ein L. P. von isolierten L. P. heißt von 2. Klasse usw. Eine Folge $\{x_n\}$ heißt von p -ter Klasse, wenn sie endlich viele L. P. der Klasse p besitzt. Eine Iterationsfolge $\{x_n\}$ heißt Oszillationsfolge bezüglich endlich vieler abstoßenden Zyklen [zur Terminologie vgl. den Bericht von H. Cremer in Jber. Deutsche Math.-Verein. 33, 185—210 (1925)], wenn die Punkte dieser Zyklen — und nur diese — L. P. höchster Klasse der Folge sind. — Nun sei $f(x)$ stückweise stetig mit stückweise stetiger 1. und 2. Ableitung und besitze nur endlich viele Extreme und Wendepunkte. (ξ_1, ξ_2) und (η_1, η_2) seien zwei abstoßende Zyklen 2. O. In den vier Punkten $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ sei $f(x)$ einseitig stetig (und somit auf den entsprechenden Seiten in genügender Nähe durchweg stetig und monoton). Dazu tritt eine komplizierte Voraussetzung über die Existenz von sechs einseitigen Umgebungen, $\Delta_1^{(1)}, \Delta_3^{(1)} \supset \Delta_1^{(1)}$ von ξ_1 , $\Delta_1^{(2)}$ von ξ_2 , $\Delta_3^{(2)} \supset \Delta_1^{(2)}$ von η_1 , $\Delta_2^{(2)}$ von η_2 , die sich monoton und stetig folgendermaßen aufeinander abbilden sollen: $f(\Delta_1^{(1)}) = \Delta_2^{(1)}$, $f(\Delta_2^{(1)}) = \Delta_3^{(1)}$, $\Delta_3^{(1)} - \Delta_2^{(1)} = \Delta_0^{(1)}$, $f(\Delta_0^{(1)}) = \Delta_1^{(2)}$, $f(\Delta_1^{(2)}) = \Delta_2^{(2)}$, $f(\Delta_2^{(2)}) - \Delta_3^{(2)} - \Delta_1^{(2)} = \Delta_0^{(2)}$, $f(\Delta_0^{(2)}) = \Delta_1^{(1)}$. Dann liegt in der Vereinigungsmenge F_A der 6 Intervalle $\Delta_k^{(i)}$ ($i = 1, 2; k = 0, 1, 2$) eine invariante Punktmenge vor, die ein Kontinuum von Punkten enthält, welche Anlaß zu Iterationsfolgen geben, die bezüglich der Zyklen (ξ_1, ξ_2) , (η_1, η_2) oszillieren. Jedes $\Delta_j^{(i)}$ ($i, j = 1, 2$) gestattet eine Zerlegung der Form $E_\infty + E_0 + \sum_{v=2}^\infty E_v$, wo die Punkte von E_0 endliche Zyklen erzeugen, die von E_v Iterationsfolgen der Klasse v , die von E_∞ solche unendlicher Klasse. Sämtliche Mengen liegen in $\Delta_j^{(i)}$ überall dicht; E_0 ist abzählbar, alle übrigen Mengen sind von der Mächtigkeit des Kontinuums. — Beweisskizze, Verallgemeinerung auf ein System von endlich vielen abstoßenden Zyklen.

Hans Pietsch.

Laguardia, Rafael: Über die Erweiterung einer Ungleichung von Tschebyscheff. Fac. Ing. Montevideo, Publ. Inst. Mat. Estadíst. 1, Nr. 7, 159—161 (1947) [Spanisch].

Im Intervall $[a, b]$ seien f und g gleichsinnig monoton, und $\alpha(x)$ liege stets zwischen $\alpha(a)$ und $\alpha(b)$, ferner mögen die Riemann-Stieltjes-Integrale $J_1 = \int_a^b f(x) d\alpha(x)$, $J_2 = \int_a^b g(x) d\alpha(x)$ und $J_3 = \int_a^b f(x) g(x) d\alpha(x)$ existieren. Dann gilt $(\alpha(b) - \alpha(a)) J_3 \geq J_1 J_2$. Der Beweis dieser verallgemeinerten Tschebyscheffschen Ungleichung stützt sich auf folgenden Integralmittelwertsatz: Es gibt zwei Zahlen A und B mit $J_1 = A f(a) + B f(b)$, wobei A zwischen den extremen Grenzen von $\alpha(x) - \alpha(a)$ und B zwischen jenen von $\alpha(b) - \alpha(x)$ liegt und $A + B = \alpha(b) - \alpha(a)$ ist.

Georg Aumann.

Gustin, W. S.: Asymptotic behavior of mean value functions. Amer. math. Monthly 57, 541—544 (1950).

The author examines the limits of $M(t) = \left(\sum_{v=1}^n a_v x_v^t \right)^{1/t}$ ($\sum a_v = 1$) for $t = 0, +\infty, -\infty$ by aid of introducing the concepts of weak and strong asymptotic equivalence. — Two functions f and g are weakly resp. strongly asymptotic to each other ($f \sim g$ resp. $f \approx g$) as $t \rightarrow t_0$ if they are both weakly resp. strongly asymptotic to the same formal power series $F = \sum_{h=0}^\infty c_h x^h$ that is if $f(t) = \sum_{h=0}^k c_h (t - t_0)^h + o((t - t_0)^k)$ (for finite t_0) or if $f(t) = \sum_{h=0}^k \frac{c_h}{t^h} + o(t^{-k})$ (for $t_0 = \pm \infty$) with $k = 0, 1, 2, \dots$ resp. if the same relation holds also between any k -th derivative $f^{(k)}$ of $f(t)$ and the k -th formal derivative $F^{(k)}$ of F . — By his method the author gains besides the results to

be obtained also by the usual method (see e. g. Hardy-Littlewood-Pólya, Inequalities, Cambridge 1934, §§ 2, 3; this Zbl. 10, 107) such as e. g. $\alpha_n^{1/t} X_n < M(t) < X_n$ for $t > 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} M(t) = X_n$, $X_n = \max_v x_v$, also the remarkable theorem asserting that $M^{(k)}(t)$ and $[\log M(t)]^{(k)}$ are both positive near $t = -\infty$ and near $t = +\infty$ if k is odd and that they are both negative near $t = +\infty$ if k is even. For $k = 2$ this gives the convexity of $M(t)$ and $\log M(t)$ near $t = -\infty$ and the concavity of both functions near $t = +\infty$, which contains a result of H. Shniad (this Zbl. 32, 152).

J. Aczél.

Tôyama, Hiraku: On the inequality of Ingham and Jessen. Proc. Japan Acad. 24, Nr. 9, 10—12 (1948).

Verf. beweist (vgl. Pólya-Szegö: Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Berlin 1925, I. S. 57, Aufg. 92), daß

$$\left[\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{jk}^s \right)^{r/s} \right]^{1/r} \leq [\min(m, n)]^{1/r-1/s} \left[\sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^n a_{jk}^r \right)^{s/r} \right]^{1/s},$$

wo die Konstante auf der rechten Seite nicht verbessert werden kann. Der Beweis beruht auf folgenden zwei Lemmen:

$$(1) \quad (x^s + a^s)^{1/s} + [(c-x)^s + b^s]^{1/s} \quad (0 \leq x \leq c)$$

hat für kein $0 < x < c$ ein Maximum.

$$(2) \quad \frac{\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^m a_{jk}^s \right)^{1/s}}{\left[\sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^n a_{jk}^s \right)^s \right]^{1/s}}$$

kann nicht Maximum sein für Systeme, die drei nicht verschwindende Elemente a_{ik}, a_{il}, a_{jl} haben.

J. Aczél.

Bonferroni, Carlo: Sulle medie multiple di potenze. Boll. Un. mat. Ital., III. S. 5, 267—270 (1950).

Verf. definiert die Mittelwerte

$$M_{p_1 p_2 \dots p_k}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{n(n-1) \dots (n-k+1)} \sum_{(i)} x_{i_1}^{p_1} x_{i_2}^{p_2} \dots x_{i_k}^{p_k} \right)^{1/(p_1 + p_2 + \dots + p_k)}$$

wobei die Summe über $i_1, i_2, \dots, i_k = 1, 2, \dots, n$, $i_\kappa \neq i_\lambda$ für $\kappa \neq \lambda$ zu erstrecken ist, und gibt einige ihrer Eigenschaften an: M ist eine wachsende Funktion von $p = \max(p_1, p_2, \dots, p_k)$. $M \rightarrow \sqrt[p]{x_1 x_2 \dots x_n}$, falls $p_j \rightarrow 0$ ($j = 1, 2, \dots, k$) unter gewissen nicht näher festgesetzten Bedingungen. — $M_{p_1 p_2 \dots p_k}$ nimmt ab, falls zwei Indizes sich einander nähern. — Die Arbeit enthält zum Schluß eine Tabelle, die sich ein teilweises Ordnen dieser Mittelwerte (bei ungeänderten x_1, x_2, \dots, x_n) mit verschiedenen Indizes nach der Größenordnung zum Ziel setzt. Die Beweise werden überhaupt nicht oder nur unvollständig gegeben.

J. Aczél.

Turán, Pál: On a new method in the analysis with applications. Časopis Mat. Fys., Praha 74, Nr. 2, 123—131 und tschechische Zusammenfassg. 131 (1950).

The paper contains a summary of the applications of the author's powerful method which can be described as: Let $|z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_n|$. Then, for $m > n$, we have

$$\max_{m-n \leq l \leq m} \left| \sum_{v=1}^n b_v z_v^l \right| |z_1|^{-l} > \left(\frac{n}{6m} \right)^n |b_1 + \dots + b_n|,$$

and for $m \geq 28n$, we have

$$\max_{m-n \leq l \leq m} \left| \sum_{v=1}^n b_v z_v^l \right| |z_n|^{-l} > \left(\frac{n}{e^{32} m} \right)^n \min_{1 \leq j \leq n} j^{-1} |b_1 + \dots + b_j|.$$

Applications to the gap theorem theory of quasi-analytic functions and Riemann Zeta functions are also claimed. No proofs are given in the text. [Zusatz der Schriftleitung: Ohne Voraussetzungen über die b_v ist die zweite Formel nicht richtig.] K. L. Hua.

Allgemeine Reihenlehre:

Andersen, A. F.: Über Differenzentransformationen. Mat. Tidsskr. B, København 1950, Festschr. t. J. Nielsen, 111—122 (1950) [Dänisch].

Posons $\binom{\nu + \alpha}{\nu} = A_\nu^\alpha$, et pour une suite a_ν ($\nu = 0, 1, 2, \dots$) définissons les différences d'ordre α par $\Delta^\alpha a_\nu = \sum_{p=0}^{\infty} A_p^{\alpha-\alpha-1} a_{\nu+p}$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots$), si cette série converge. Dans sa thèse (København, 1921) l'A. a démontré que si $a_\nu \rightarrow 0$, alors la formule (*) $\Delta^\alpha (\Delta^\beta a_\nu) = \Delta^{\alpha+\beta} a_\nu$ est valable pour les valeurs α, β qui satisfont aux inégalités $\alpha \geq -1$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta \geq 0$. Si l'on impose des conditions additionnelles à la suite a_ν , on peut élargir le domaine pour lequel (*) sera vérifiée. Voici le théorème principal de la note: Supposons que (*) soit vérifiée pour $\alpha = -r - t - 1$, $\beta = r + 1$ ($r + t \geq 0$, $t \geq 0$), alors elle sera vérifiée pour les valeurs α, β qui satisfont à $\alpha \geq -r - t - 1$, $\beta \geq -t$, $\alpha + \beta \geq -t$. Ce théorème contient comme cas particuliers les résultats suivants, obtenus en partie déjà dans la thèse de l'A.:

1. si $a_\nu \rightarrow 0$ et si $\sum_{p=0}^{\infty} A_p^r \Delta^{r+1} a_p$ converge, alors (*) vaut pour $\alpha \geq -r - 1$, $\beta \geq 0$, $\alpha + \beta \geq 0$;
2. si $a_\nu = o(\nu^{-t})$ ($t > 0$), alors (*) vaut pour $\alpha \geq -t - 1$, $\beta \geq -t$, $\alpha + \beta \geq -t$.

Janos Horváth.

Kalašnikov, M. D.: Eine Bemerkung über unendliche Produkte. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 73, 9—12 (1950) [Russisch].

Verf. zeigt: Genau dann konvergiert für jedes konvergente Produkt $\prod (1 + u_k)$ auch $\prod (1 + a_k u_k)$, wenn $\lim a_k = a$ existiert und gleich 1 oder 0 ist sowie $\sum |a_k - a|$ konvergiert.

Karl Zeller.

Tosciano, Letterio: Su una relazione di ricorrenza triangolare. Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma Ist. naz. alta Mat., V. S. 9, 247—254 (1950).

L'A. poursuit ses recherches sur les puissances de l'opérateur de dérivation (ce Zbl. 38, 212) et étudie les nombres $H_{n,i}$ définis par: $H_{n,i} = (2n - 2i + 1) H_{n-1,i-1} + (2i - 1) H_{n-1,i}$, qui se rattachent aux $A(n, p)$ introduits par Euler [Opera omnia, T. (1) X, chap. VII, art 173, p. 373]. Il en donne la table pour $n \leq 10$. Ces nombres, seuls, ou combinés aux coefficients de faculté, etc, satisfont à de nombreuses identités dont la plus simple est: $\sum_{i=1}^n H_{n,i} = 2^{n-1} (n - 1)!$. Application au calcul de

la somme: $\sum_{i=0}^{\infty} (i - \lambda + 1)^n \cdot x^{i-\lambda+1}, |x| < 1$.

Albert Sade.

Schmetterer, I.: Beitrag zur Multiplikation unendlicher Reihen. Mh. Math., Wien 54, 313—329 (1950).

In Verallgemeinerung verschiedener Ergebnisse von Hardy, Neder, Rosenblatt u. a. sowie klassischer Sätze werden 7 Sätze über Konvergenz bzw. Summierbarkeit von einfachen und Doppelreihen bewiesen, die durch Cauchysche oder Foursiersche Multiplikation (letztere vgl. etwa: Hardy, Divergent Series, Oxford 1949, Kap. X; dies. Zbl. 32, 58) aus gegebenen Reihen entstehen. Die Ergebnisse werden durch zahlreiche Bemerkungen, Corollare und Literaturhinweise in die Reihenlehre eingeordnet.

Th. Kaluza jr.

Hwang, Cheng-Chung: Quasimonotone series. Sci. Record, Acad. Sinica 3, 183—190 (1950).

Nach O. Szász (dies. Zbl. 35, 39) heißt eine Folge $a_n > 0$ quasimonoton, wenn es eine Konstante $\alpha \geq 0$ gibt, so daß $a_{n+1} \leq a_n (1 + \alpha/n)$ ist von einer Nummer an. Zu der von O. Szász [vgl. auch Bull. Amer. math. Soc. 50, 587—595 und 856—867 (1944); Ann. Math., Princeton, II. S. 47, 213—220 (1946)] begonnenen Untersuchung unendlicher Reihen, deren Glieder positiv und quasimonoton sind, liefert Verf. weitere Beiträge. Z. B. gilt, wie sich aus einem Satz von Szász einfach

ergibt: Ist die Folge $a_n > 0$ quasimonoton,

$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n \rightarrow \infty$, $\lambda_{n+1} - \lambda_n = O(\lambda_n - \lambda_{n-1})$, $\alpha_n = \lambda_n (\lambda_{n+1} - \lambda_n)^{-1} (a_{\lambda_n} / a_{\lambda_{n+1}} - 1)$,
so ist $\sum a_n$ sicher konvergent, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n > 1$, und sicher divergent, wenn

$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n < 1$ ist. Ferner gilt [für den Fall der gewöhnlichen Monotonie vgl. T. W.

Chaundy und A. E. Jolliffe, Proc. London math. Soc., II. S. 15, 214—216 (1916)]:
Ist die Folge $b_n > 0$ quasimonoton, so ist dann und nur dann $\sum b_n \sin nx$ gleichmäßig konvergent in jedem Intervall, wenn $n b_n \rightarrow 0$ strebt. — Den von O. Szász eingeführten Fall der Quasimonotonie von Funktionen modifiziert Verf., indem eine Funktion $g(x) > 0$ fastmonoton abnehmend genannt wird, wenn zu einem festen $a > 0$ für $x \geq a$ und $0 \leq h \leq 1$ stets $g(x+h) \leq g(x)(1 + \alpha h/x)$ gilt. Ist $g(x)$ fastmonoton abnehmend, so ist $g(x)$ quasimonoton (aber nicht umgekehrt) und in jedem Intervall (a, b) mit $b > a$ von beschränkter Schwankung. Verf. beweist den folgenden in der Richtung des zweiten Mittelwertsatzes liegenden Satz: Ist $g(x) > 0$ fastmonoton abnehmend für $0 < \beta \leq x \leq \gamma$ und $f(x)$ in (β, γ) Lebesgue-integrierbar, dann gibt es eine in (β, γ) liegende Zahl η , für die

$$\int_{\beta}^{\gamma} f(x) g(x) dx = g(\beta + 0) \int_{\beta}^{\eta} f(x) dx + \alpha \int_{\beta}^{\gamma} dx \int_x^{\eta} f(t) \frac{g(x)}{x} dt.$$

Daraus ergibt sich ein Konvergenzkriterium für unechtliche Integrale: Ist $g(x) > 0$

fastmonoton abnehmend für $x \geq a > 0$, $\left| \int_{\xi}^{\eta} f(t) dt \right| < A$ für alle $\xi, \eta \geq a$, und

$\int_a^{\infty} x^{-1} g(x) dx$ konvergent, dann ist $\int_a^{\infty} f(x) g(x) dx$ konvergent. Ein analoges

Kriterium gilt auch für unendliche Reihen.

Werner Meyer-König.

● Cooke, R. G.: Infinite matrices and sequence spaces. London: Macmillan and C., Ltd. 1950, XIII, 347 S. 42 s. net.

Das Interesse des Autors für unendliche Matrizen hat sich aus seiner Beschäftigung mit den Fragen der Limitierungstheorie entwickelt. Für ihn ist deshalb schon die einzelne unendliche Matrix interessant. Die Auffassung einer unendlichen Matrix als einer linearen Abbildung eines geeigneten linearen Raumes tritt demgegenüber zurück, ebenso die Frage nach der Gesamtheit der Matrizen, die einen linearen Raum in sich überführen, deren eingehende Untersuchung im wesentlichen einem zweiten Buch vorbehalten ist. Nach einem einführenden ersten Kapitel, das sich mit den Rechenoperationen und der Exponentialreihe für unendliche Matrizen beschäftigt, studiert das 2. Kap. eingehend die Frage nach rechten und linken Reziproken; von den Sätzen seien die beiden Formalsätze von Toeplitz (hier Dienes zugeschrieben) und die Reziprokenbildung mit der Neumannschen Reihe unter allgemeinen Voraussetzungen erwähnt. Auch die Ergebnisse von Pólya über die Auflösung unendlicher Gleichungssysteme werden dargestellt. Kap. 3 betrachtet die Gleichungen $AX - XD = 0$ und $AX - XA = I$ und gibt die speziellen Lösungen von Dienes und dem Verf. wieder und einen Satz von Taussky, wonach $AX - XA = I$ in der regulären Darstellung eines Gruppenrings nicht lösbar ist. Kap. 4 bringt die Sätze von Kojima-Schur und Silverman-Toeplitz über K - und T -Matrizen, die jede konvergente Folge wieder in eine konvergente bzw. eine zum selben Limes konvergente transformieren und die entsprechenden Sätze für Transformationen konvergenter Reihen. Beispiele solcher Verfahren und eine Reihe von Sätzen von Agnew, Steinhaus u. a. über diese Matrizen und ihre Zusammensetzung werden gebracht. Kap. 5 untersucht die Äquivalenz, absolute Äquivalenz, Regularität und absolute Regularität von T -Matrizen. Als Beispiele Césarosche, Rieszsche Mittel und das Borelverfahren. Auch die Frage der Hintereinanderausführung (Assoziativität) zweier Mittel wird nach Agnew studiert. Kap. 6 beschäftigt sich mit dem Kern einer Folge und enthält die Resultate von Knopp, Agnew und Robinson über das Enthaltensein des Kerns der Bildfolge im Kern der ursprünglichen Folge. Kap. 7 untersucht, für welche divergenten Folgen eine K - bzw. T -Matrix unwirksam ist. Zusammenhang mit der Existenz einer linken Reziproken. Kap. 8 studiert mit funktionentheoretischen Hilfsmitteln die Methoden, eine Taylorreihe im Mittag-Lefflerschen Stern oder Teilen davon zu summieren (Borel, Mittag-Leffler, Malmquist, Okada), ferner die Frage der Wirksamkeit eines Verfahrens für beschränkte Folgen, die sich auf die Wirksamkeit für Dualfolgen (aus 0 und 1 nur) reduziert. Resultate von Agnew, Hill, Buck und Pollard im Zusammenhang mit der Maßtheorie. Kap. 9 bringt die Grundlagen der Theorie des Hilbertschen Raumes, als:

Koordinatenraum aufgefaßt, im wesentlichen der klassischen Auffassung (etwa Hellinger-Toeplitz) folgend, einschließlich der Sätze über beschränkte Matrizen. Kap. 10 stellt die Theorie der vollkommenen Räume von Toeplitz und dem Ref. dar, in verallgemeinerter Gestalt, die auf H. Allen zurückgeht. Eine größere Zahl von Aufgaben ist jedem Kapitel beigegeben und erleichtert das Studium des gut lesbaren Buches. *Gottfried Köthe.*

Čelidze, V. G.: Über Transformationen von Doppelfolgen. Akad. Nauk Grusinskoj SSR, Trudy Tbilissk. mat. Inst. Razmadze 17, 61—89 und grusinische Zusammenfassg. 90—94 (1949) [Russisch].

Verf. betrachtet Transformationen der Form $t_{mn} = \sum_{i,k} a_{mnik} s_{ik}$. Sei $K_{\varphi\psi}$

die Menge der konvergenten Doppelfolgen s_{mn} mit

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{|s_{mn}|}{\varphi(m)} = \alpha_n < \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|s_{mn}|}{\psi(n)} = \beta_m > \infty \quad (\varphi(n), \psi(m) > 0,$$

$\lim \varphi(n) = \lim \psi(m) = \infty$), $K_{\varphi\psi}^*$ die Untermenge mit $\alpha_n = \beta_n = 0$. λ -lim t_{mn} wird erklärt als $\lim t_{mn}$ für $m, n \rightarrow \infty$ unter der Einschränkung $1/\lambda \leq m/n \leq \lambda$. Genau dann existiert für jedes $\{s_{ik}\} \in K_{\varphi\psi}$ die Transformierte t_{mn} für $m, n = 0, 1, \dots$ und ist λ -lim $t_{mn} = \lim_{m,n} s_{mn}$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $\sum_{i,k} |a_{mnik}| < \infty$ ($m, n = 0, 1, \dots$);
2. λ -lim $\sum_{i,k} a_{mnik} = 1$;
3. $\sum_i \varphi(i) |a_{mnik}| < \infty$ ($m, n, k = 0, 1, \dots$);
4. $\sum_k \psi(k) |a_{mnik}| < \infty$ ($m, n, i = 0, 1, \dots$);
5. λ -lim $\sum_i \varphi(i) |a_{mnik}| = 0$ ($k = 0, 1, \dots$);
6. λ -lim $\sum_k \psi(k) |a_{mnik}| = 0$ ($i = 0, 1, \dots$);
7. $\sum_{i,k} |a_{mnik}| < M$ ($m, n = 0, 1, \dots$ mit $\frac{1}{\lambda} \leq \frac{m}{n} \leq \lambda$).

Die entsprechenden Bedingungen für $K_{\varphi\psi}^*$ sind 1., 2., 3., 4., 7 und

- 5'. λ -lim $\sum_i \varphi(i) |a_{mnik}| < \infty$ ($k = 0, 1, \dots$);
- 6'. λ -lim $\sum_k \psi(k) |a_{mnik}| < \infty$ ($i = 0, 1, \dots$);
8. λ -lim $a_{mnik} = 0$ ($i, k = 0, 1, \dots$).

Analoge Sätze gelten für Matrizen der Form $a_{ik}(x, y)$. Als Anwendung folgt der Satz: Eine konvergente Doppelfolge s_{mn} mit $\lim_{m,n \rightarrow \infty} \frac{s_{mn}}{m+1} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_{mn}}{n+1} = 0$ ist $C_{\alpha\beta}^{(2)}$ -limitierbar ($\alpha, \beta \geq 0$), wobei λ bedeutet, daß für die betreffenden Cesaro-transformierten nur der λ -lim existieren muß. Für $\alpha = \beta = 1$ wurde dieser Satz vom Verf. aufgestellt in Soobščenia Akad. Nauk Grusinskoj SSR 7, No. 3 (1947). Weiter wird ein Satz von Timan (dies. Zbl. 35, 40) bewiesen. Literatur: G. M. Robinson, Trans. Amer. math. Soc. 28, 50—73 (1926); H. J. Hamilton (dies. Zbl. 13, 303; 14, 15; 19, 59, 21, 221); Hill und Hamilton (dies. Zbl. 25, 38); F. M. Mears (dies. Zbl. 35, 159); Ogiveckij (dies. Zbl. 37, 326—327); Timan, Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 76, 647—649 (1951).

Karl Zeller.

Safronova, G. P.: Über eine Summationsmethode für divergente Reihen, die mit dem singulären Integral von Jackson zusammenhängt. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 73, 277—278 (1950) [Russisch].

D. Jackson betrachtete in seiner Dissertation (Göttingen 1911) die Transformation $J_n(x) = \frac{3}{2\pi n(2n^2+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{\sin n(t-x)/2}{\sin(t-x)/2} \right)^4 dt$, die unter Verwendung der Fourierreihe von $f(t)$ lautet

$$J_n(x) = \varrho_0^{(n)} a_0 + \sum_{k=1}^{2n-2} \varrho_k^{(n)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Hierbei ist $\varrho_k^{(n)} = \frac{1}{2n(2n^2+1)} \left[\frac{(2n-k+1)!}{(2n-k-2)!} - \varepsilon \frac{(n-k+1)!}{(n-k-2)!} \right]$ mit $\varepsilon = 4$ für $0 \leq k \leq n-2$, $\varepsilon = 0$ für $n-2 < k \leq 2n-2$; $\varrho_k^{(n)} = 0$ sonst. — Verf. be-

achtet nun das durch $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum q_k^{(n)} u_k$ definierte Limitierungsverfahren J und zeigt, daß jede vom Cesàroverfahren ($C, 3$) summierte Reihe $\sum u_k$ von J zum selben Wert summiert wird, daß hingegen J nicht vergleichbar mit ($C, 4$) ist und daß es kein normales Verfahren (d. h. ein Verfahren, das durch eine umkehrbare Dreiecksmatrix dargestellt wird) gibt, das nicht schwächer als J ist. Letztere Tatsache folgt einfach durch Betrachtung der von J in $(0, 0, \dots)$ transformierten $\{u_k\}$.

Karl Zeller.

Zak, I. E.: Die absolute Summierbarkeit von numerischen Doppelreihen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 73, 639—642 (1950) [Russisch].

Eine Doppelfolge s_{mn} heiße absolut konvergent, wenn

$$\sum_n \sum_m |s_{mn} - s_{m-1,n} - s_{m,n-1} + s_{m-1,n-1}| < \infty, \\ \sum_m |s_{mn} - s_{m-1,n}| < \infty, \quad \sum_n |s_{mn} - s_{m,n-1}| < \infty$$

st. Mit Hilfe dieser Definition erklärt man die absolute Cesrosummierbarkeit C, α, β ($\alpha, \beta > -1$). Verf. zeigt: Satz 1: Ist $\sum \sum a_{mn}$ $|C, \alpha, \beta|$ -summierbar, so auch $|C, \alpha + h, \beta + k|$ -summierbar für $h > 0, k > 0$. (Für gewöhnliche C -Summierbarkeit ist dieser Satz bekanntlich falsch.) Satz 2: Ist $\sum \sum a_{mn}$ $|C, \alpha, \beta|$ -summierbar ($\alpha, \beta \geq 0$), so konvergiert $\sum \sum a_{mn} \left[\binom{m+\alpha}{m} \binom{n+\beta}{n} \right]^{-1}$ absolut. Satz 3: Eine trigonometrische Doppelreihe mit den Koeffizienten $a_{mn}, b_{mn}, c_{mn}, d_{mn}$ ist fast überall $|C, \alpha, \beta|$ -summierbar ($\alpha, \beta > \frac{1}{2}$), wenn für $q_{mn}^2 = q_{mn}^2 + \dots + d_{mn}^2$ gilt

$$\sum \sum q_{mn}^2 [\log(m+1)]^{\varepsilon_1} [\log(n+1)]^{\varepsilon_2} < \infty, \\ \sum_m q_{m0}^2 [\log(m+1)]^{\varepsilon_3} < \infty, \quad \sum_n q_{0n}^2 [\log(n+1)]^{\varepsilon_4} < \infty, \quad \text{mit gewissen } \varepsilon_i > 1.$$

Die letzte Bedingung darf für kein i durch $\varepsilon_i \geq 1$ ersetzt werden. Karl Zeller.

Thron, W. J.: Twin convergence regions for continued fractions $b_0 + K(1/b_n)$, (I. Amer. J. Math. 71, 112—120 (1949).

Als „twin convergence regions“ (Konvergenz-Doppelbereich: KDB) bezeichnet Verf. in der vorangehenden Arbeit I (Amer. J. Math. 66, 428—438 (1944)) ein Paar von Bereichen B_f, B_g derart, daß der angegebene Kettenbruch stets konvergiert, wenn $b_{2n} \in B_f, b_{2n+1} \in B_g$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) und die notwendige Konvergenzbedingung $\sum |b_n| = \infty$ erfüllt ist. Gibt es keinen KDB, von dem der vorgelegte ein echter Teil ist, so heißt dieser ein „bester“ KDB. Es seien nun B_f und B_g bzw. erklärt durch $r \geq f(\vartheta), r \geq g(\vartheta)$ [$f(\vartheta), g(\vartheta)$ periodisch mit der Periode 2π und zwischen festen positiven Schranken gelegen, $z = r e^{i\vartheta}$]; dann muß nach I notwendig sein $f(\vartheta) g(\pi - \vartheta) \geq 4$. Verf. betrachtet nun den Grenzfall $f(\vartheta) g(\pi - \vartheta) = 4$ und

zeigt, daß man dann einen besten KDB erhält, wenn man hat $f(\vartheta) = f_0 \exp \int_{\pi/2}^{\vartheta} \operatorname{tg} \alpha(\psi) d\psi$,

wo $f_0 > 0$ fest, und ferner die stetige, mit 2π periodische Funktion $\alpha(\vartheta)$ (der Winkel der Randtangente mit dem zugehörigen Kreis $|z| = r$) sowie ihre Differenzenquotienten dem Betrag nach unterhalb je einer Konstanten $< \pi/2$ bzw. < 1 verbleiben. Zum Schluß wird an speziellen Beispielen divergenter Kettenbrüche gezeigt, daß analog gewisse Konvergenzbedingungen von van Vleck und dem Verf. sich nicht verbessern lassen.

Hermann Schmidt (Braunschweig).

Frank, Evelyn: Orthogonality properties of C -Fractions. Bull. Amer. math. Soc. 55, 384—390 (1949).

Die Nherungsnenner $D_n(z)$ eines Kettenbruchs der Gestalt

$$b_0/d_1 + z - b_1/d_2 + z - b_2/d_3 + z - \dots \quad (J\text{-Kettenbruch})$$

mit komplexen b_n, d_n und $b_n \neq 0$ genügen (vgl. z. B. Wall, Continued fractions, New York 1948, S. 192 ff.; dies. Zbl. 35, 36) Orthogonalitätsrelationen der Form

$S(D_p(z) D_q(z)) = 0$ für $p \neq q$, $\neq 0$ für $p = q$, wobei S einen linearen Operator bedeutet, für den $S(z^q) = c_q = b_0 b_1 \dots b_q$. Verf. betrachtet nun Kettenbrüche der Gestalt $1 + a_1 z^{\alpha_1}/1 + a_2 z^{\alpha_2}/1 + \dots (a_\nu \text{ komplex, } \alpha_\nu \text{ natürliche Zahlen})$ und zeigt, daß sich aus den Näherungsnennern $B_n(z)$ ebenfalls Polynome $B_n^*(z)$ mit entsprechenden Orthogonalitätseigenschaften gewinnen lassen. Umgekehrt entspricht einer gegebenen komplexen Zahlfolge c_q , wenn nur gewisse Ungleichheiten zwischen Determinanten aus den c_q bestehen, auch ein solcher Kettenbruch mit seinen Näherungsnennern $B_n(z)$. Betrachtung von Sonderfällen, von denen einer vermöge Ersetzung von z durch $1/z$ auf die J -Kettenbrüche zurückführt. Zum Schluß wird ein Gegenstück zu der bekannten Christoffelschen Formel für die bilineare Summe $\sum_{q=1}^n D_q(z) D_q(w)$ entwickelt.

Hermann Schmidt (Braunschweig).

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Meyers, Leroy F. and Arthur Sard: Best interpolation formulas. J. Math. Phys., Massachusetts 29, 198—206 (1950).

Sind Werte $x(0), x(1), \dots, x(m)$ einer Funktion $x(t)$ gegeben, so kann der Wert $x(u)$ allgemein durch einen Ausdruck $A = a_0 x(0) + a_1 x(1) + \dots + a_m x(m)$ approximiert werden, wobei die Koeffizienten a_i von u abhängen. Soll die Approximation für Polynome vom Grade n exakte Werte liefern, so erhält man für den Fehler $x(u) - A$ eine Abschätzung in Form eines Integralausdrucks. Dabei ist $x^{(n+1)}(t)$ als stetig anzunehmen. „Beste“ Interpolationsformeln ergeben sich durch Minimieren des Fehlers, sie weichen z. T. von den entsprechenden gewöhnlichen Interpolationsformeln ab. Die Fälle $m = 2, 3, 4, 5$, $n = 0, 1, 2$ werden untersucht und ferner auch der Einfluß einer linearen Transformation der unabhängigen Veränderlichen.

Evert Johannes Nyström.

Bernštejn (Bernstein), S. N.: Über einige neue Ergebnisse der Theorie der Approximation von Funktionen einer reellen Veränderlichen. Acta sci. math., Szeged 12 A, L. Fejér et F. Riesz LXX annos natis dedic., 161—169 (1950) [Russisch].

Verf. gibt einen gedrängten Überblick über die Hauptergebnisse einiger neuerer Arbeiten ohne Beweise. (Das Literaturverzeichnis enthält 27 Nummern, darunter 18 Arbeiten des Verf.) Es handelt sich darin vor allem um die beste Annäherung $A_p f(x)$ einer stetigen Funktion $f(x)$ durch „ganze Funktionen des Grades p “ [eine solche Funktion $g(x)$ ist auf der reellen Achse regulär und befriedigt dort an irgendeinem Punkt, z. B. am Nullpunkt, die Ungleichung $\lim |g^{(n)}(0)|^{1/n} = p$], und zwar um den Zusammenhang zwischen $A_p(f(x))$ und der (gewöhnlichen) besten Annäherung durch Polynome, ferner um Abschätzungen für $A_p f(x)$, die von p und der in gewisser Weise definierten Funktionenklasse, der $f(x)$ angehört, abhängen, schließlich um die Frage, ob man Funktionenklassen für $f(x)$ durch das Verhalten der besten Annäherung $A_p f(x)$ erklären kann.

Wolfgang Hahn.

Favard, J.: Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle. Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. Nr. 15 (Analyse harmonique, Nancy 15. — 22. 6. 1947), 97—110 (1949).

Exposé des résultats d'une série de recherches initiées par l'A. en 1936 par sa démonstration donnée pour l'inégalité de H. Bohr concernant l'intégrale d'une fonction presque périodique dont les exposants sont bornés en module inférieurement par une quantité positive. Il s'agit en premier lieu des résultats de l'A., de Achiezer et Krejn et du rapporteur sur les meilleurs procédés d'approximation de certaines classes de fonctions périodiques par des polynômes trigonométriques d'ordre donné [Favard: C. r. Acad. Sci., Paris 203, 1122—1124 (1936), Bull. Sci. math. 61, 209—224, 243—256 (1937); N. Achiezer et M. Krejn: C. r. (Doklady)

Acad. Sci. URSS, n. S. 15, 107—111 (1937); Béla Sz.-Nagy: C. r. Acad. Sci., Paris 206, 808—811, 1342—1344 (1938), Ber. Sächs. Akad. Wiss., math.-phys. Kl. 90, 103—134 (1938), 91, 3—24 (1939), ce Zbl. 16, 59, 300, 17, 251, 18, 209, 353, 21, 401]. Puis on parle des résultats de l'A. et de Nikolskij sur les procédés d'approximation par des polynômes ordinaires, dans un intervalle donné, des fonctions satisfaisant à la condition de Lipschitz [Favard: Bull. Sci. math., II. S. 62, 338—351 (1938), ce Zbl. 20, 213; S. Nikolskij: C. r. (Doklady) Acad. Sci. URSS, n. S. 52, 7 (1946)], ainsi que d'autre résultats de Nikolskij. On mentionne le problème de saturation posé par l'A., problème qui a été résolu depuis lors, dans des cas importants, par M. Zamansky. Enfin, on parle des problèmes et des résultats concernant des procédés d'approximation par des polynômes d'interpolation; il s'agit ici d'interpolation dans un sens étendu: les polynômes en question ne coïncident pas en général avec la fonction donnée en des points donnés, mais ils peuvent être calculés en une certaine façon à partir des valeurs données de la fonction en un certain nombre de points.

Béla Sz.-Nagy.

Tornheim, Leonard: On n -parameter families of functions and associated convex functions. Trans. Amer. math. Soc. 69, 457—467 (1950).

Let n be a positive integer and F a family of real continuous functions $f(x)$, $a \leq x \leq b$, such that for every set of points (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$, with $a \leq x_1 < \dots < x_n \leq b$, there is exactly one $f(x) \in F$ with $f(x_i) = y_i$. A continuous function $g(x)$ defined in $a \leq x \leq b$ is called convex with respect to the family F if no member of F intersects $g(x)$ more than n times. The case $n = 2$ has been considered by Beckenbach (Bull. Amer. math. Soc. 43, 363—371 (1937); this Zbl. 16, 352). Part of the paper is devoted to the extension of the results of Beckenbach, the chief one being the following convergence theorem. Let $\{P_{1i}\}, \dots, \{P_{ni}\}$, $i = 1, 2, \dots$, be n sequences of points of the plane with distinct abscissae contained in the strip $a \leq x \leq b$, $-\infty < y < +\infty$, and such that $P_{1i} \rightarrow P_1, \dots, P_{ni} \rightarrow P_n$, as $i \rightarrow \infty$; call $f_i(x)$ the member of F passing through P_{1i}, \dots, P_{ni} and $f(x)$ the one passing through P_1, \dots, P_n . Then, as $i \rightarrow \infty$, $f_i(x) \rightarrow f(x)$, uniformly in $a \leq x \leq b$. It is also shown that when $n \geq 3$ the assumption that the members of F are differentiable implies that so are the convex functions with respect to F . Another part of the paper discusses the approximation of a continuous function $g(x)$, $a \leq x \leq b$, by means of elements of the family F . If $h(x)$, $a \leq x \leq b$, is a continuous function put $\|h\| = \max_x |h(x)|$. A best approximant in F of a continuous function $g(x)$ is defined as an element f^* of F such that $\|f^* - g\| = \inf_{f \in F} \|f - g\|$. The following

results are proved. (i) A necessary and sufficient condition in order that f be a best approximant in F of g is that $f - g$ takes the value $\pm \|f - g\|$ on a set of $n + 1$ points and with opposite signs for consecutive points of the set. There is exactly one best approximant in F of g . Mauricios Matos Peixoto.

Calderón, A. P. and A. Zygmund: On the theorem of Hausdorff-Young and its extensions. Contrib. Fourier Analysis, Ann. Math. Studies Nr. 25, 166—188 (1950).

Der folgende Satz, der sich auf ein in (a, b) orthonormales Funktionensystem $\{\varphi_n\}$ bezieht, das dort der Ungleichung $|\varphi_n(t)| \leq M$ für alle n genügt, rührt von F. Riesz her und enthält für $a = 0$, $b = 1$, $\bar{\varphi}_n = e^{-2\pi i n t}$, $M = 1$ den Satz von Hausdorff-Young als Spezialfall. 1. Sei $f \in L^p(a, b)$, so genügen die Fourierkoeffizienten (1) $c_n = \int_a^b f \bar{\varphi}_n dt$ von f bezüglich des Systems $\{\varphi_n\}$ der Ungleichung

$\|c\|_{p'} \leq M^{2/p-1} \|f\|_p$, wobei $\|f\|_p = \left\{ \int_a^b |f|^p dt \right\}^{1/p}$, $\|c\|_p = \left\{ \sum_n |c_n|^p \right\}^{1/p}$, $1 < p < 2$, $1/p + 1/p' = 1$, also $p' > 2$. — 2. Sei eine Zahlenfolge $\{c_n\}$ gegeben und $\|c\|_p$

endlich, so gibt es eine Funktion $f \in L^{p'}(a, b)$, die (1) für alle n genügt derart, daß $\|f\|_{p'} \leq M^{2/p-1} \|c\|_p$ gilt. — Den Hauptgegenstand der vorliegenden Untersuchung bildet die Darstellung eines neuen einfachen Beweises dieses F. Rieszschen Satzes und einer Reihe weiterer Resultate unter direkter Anwendung des Phragmén-Lindelöfschen Maximumprinzips für analytische Funktionen, die in einem Streifen definiert sind, und unter ausdrücklicher Vermeidung der Konvexitätssätze von M. Riesz und Thorin.

Viktor Garten.

Sz.-Nagy, Béla: Méthodes de sommation des séries de Fourier. II. Časopis Mat. Fys., Praha 74, Nr. 3, 210—217 und tschechische Zusammenfassung. 218—219 (1950).

Sz.-Nagy, Béla: Méthodes de sommation des séries de Fourier. III. Acta Sci. math., Szeged 13, 247—251 (1950).

Die beiden Noten befassen sich mit Matrixtransformationen von Fourierreihen, denen Dreiecksmatrizen $A = (\lambda_{nk})$ ($n = 0, 1, 2, \dots; k = 0, 1, \dots, n$) mit beliebigen reellen oder komplexen Elementen, wobei nur $\lambda_{n0} = 1$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) sein soll, zugrunde liegen. Ist $f(x)$ eine integrierbare Funktion, so sei $f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x)$ mit $c_k(x) = a_k \cos kx + b_k \sin kx$ ihre Fourierreihe und $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{c}_k(x)$ mit $\tilde{c}_k(x) = a_k \sin kx - b_k \cos kx$ die zugehörige konjugierte Reihe. Ferner seien $\sigma_n(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_{nk} c_k(x)$ und $\tilde{\sigma}_n(x) = \sum_{k=1}^n \lambda_{nk} \tilde{c}_k(x)$ die aus diesen Reihen unter Verwendung von A gebildeten Mittel, $\sigma_n^*(x)$ und $\tilde{\sigma}_n^*(x)$ die entsprechenden Fejérschen Mittel. Bekanntlich strebt $\sigma_n^*(x) \rightarrow f(x)$ in jedem Lebesgueschen Punkt von $f(x)$, wobei überdies die Konvergenz im Innern jedes Stetigkeitsintervalls von $f(x)$ eine gleich-

mäßige ist. Ebenso strebt $\tilde{\sigma}_n^*(x) \rightarrow \tilde{f}(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi [f(x+t) - f(x-t)] \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt$ in

jedem Lebesgueschen Punkt von $f(x)$, in dem $\tilde{f}(x)$ existiert. Verf. nennt A eine Matrix vom Typus F bzw. vom Typus \tilde{F} , wenn die Mittel $\sigma_n(x)$ bzw. $\tilde{\sigma}_n(x)$ die genannten Eigenschaften der Fejérschen Mittel $\sigma_n^*(x)$ bzw. $\tilde{\sigma}_n^*(x)$ aufweisen. — In seiner früheren gleichbetitelten Note I (dies. Zbl. 39, 296) hat Verf. hinreichende Bedingungen dafür angegeben, daß A vom Typus F ist. Entsprechend zeigt er in der vorliegenden Note II, daß die beiden folgenden Bedingungen hinreichend dafür sind, daß die Matrix A vom Typus \tilde{F} ist:

(A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{nk} = 1$ ($k = 1, 2, \dots$); (B) $\sum_{k=0}^{v-1} \left[\sum_{i=1}^{n-k} \frac{k+1}{k+i} \right] |A_{nk}^2| + \sum_{k=v}^{n-1} \left[\sum_{i=0}^k \frac{n-k}{n-i} \right] |A_{nk}^2| < C$,

wo $A_{nk}^2 = \lambda_{nk} - 2\lambda_{n,k+1} + \lambda_{n,k+2}$ ($\lambda_{n,n+1} = 0$), v die größte in $n/2$ enthaltene ganze Zahl und C eine von n unabhängige Konstante ist. Sind die Bedingungen (A) und (B) erfüllt, so strebt $\tilde{\sigma}_n(x) - \tilde{\sigma}_n^*(x) \rightarrow 0$ in jedem Punkt x mit

$\int_0^h |f(x+t) - f(x-t)| dt = o(h)$ für $h \rightarrow 0$, wobei die Konvergenz im Innern jedes

Stetigkeitsintervalls von $f(x)$ eine gleichmäßige ist. — Die Note III ergänzt das vorstehende Resultat, indem sie notwendige Bedingungen dafür angibt, daß für jede mit 2π periodische stetige Funktion $f(x)$ an jeder Stelle x die Limesbeziehung $\tilde{\sigma}_n(x) - \tilde{\sigma}_n^*(x) \rightarrow 0$ gilt. Die Bedingungen lauten: (A) $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{nk} = 1$ ($k = 1, 2, \dots$)

(C) $|\lambda_{nk}| < C_1$; (b) $\left| \sum_{k=0}^{v-1} \left[\sum_{i=1}^{n-k} \frac{k+1}{k+i} \right] A_{nk}^2 + \sum_{k=v}^{n-1} \left[\sum_{i=0}^k \frac{n-k}{n-i} \right] A_{nk}^2 \right| < C_2$,

wo C_1, C_2 von n unabhängige Konstante bedeuten. Dabei kann (b) ersetzt werden

durch (b') $\sum_{k=1}^v \frac{\lambda_{nk} + \lambda_{n,n-k+1}}{k} = \log n + O(1)$.

Friedrich Lösch.

Sivhail, S. D.: On Cesaro non-summability of Fourier series. III. Ganita, Lucknow 1, 27—30 (1950).

Soit $f(x)$ une fonction L -intégrable périodique de période 2π et posons $q(t) = \frac{1}{2} [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)]$. Soit (1) $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ la série de Fourier de la fonction $f(x)$. On sait (F. T. Wang, ce Zbl. 29, 255) que la condition $\lambda(t) = \int_0^t \frac{q(t)}{t} dt = o(t \log t^{-1})$, $t \rightarrow 0$, est suffisante pour la sommabilité (C, 1) de la série (1) au point x . Par un exemple l'A. démontre que la condition $\lambda(t) = o(t (\log t^{-1})^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$, $t \rightarrow 0$, est insuffisante pour la sommabilité (C, 1).
Nicola Obrechhoff.

Lozinskij, S. M.: Über die Konvergenz Fourierscher Doppelreihen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 72, 841—843 (1950) [Russisch].

Seien C die Menge der 2π -periodischen stetigen Funktionen $f(x, y)$, $\|f\| = \max |f(x, y)|$, $s_{nm} = s_{nm}(f)$ die Teilsummen der Fourierreihe von $f(x, y)$. Ω bilde die Menge der in $0 \leq u < \infty$ erklärten monoton wachsenden Funktionen $\omega(u)$ mit $\omega(u_1 + u_2) \leq \omega(u_1) + \omega(u_2)$, $\omega(u) = 0$ genau für $u = 0$. Für $\omega_i \in \Omega$ werde mit $C_{\omega_1 \omega_2}$ die Menge der $f \in C$ mit $|f(x + \alpha, y + \beta) - f(x, y)| \leq A(f) \omega_1(|\alpha|) + B(f) \omega_2(|\beta|)$ bezeichnet. Π sei eine Menge von Paaren natürlicher Zahlen (n, m) , die zu jedem N ein Paar mit $n, m > N$ enthält. Verf. definiert in naheliegender Weise den Ausdruck $\lim_{\Pi} s_{nm}$ und beweist Satz 1: Sei $\omega_i \in \Omega$, $\lim_{u \rightarrow 0+} u/\omega_i(u) = 0$ ($i = 1, 2$). Gilt gleichzeitig

$$\lim_{\Pi} \min [\omega_1(1/n), \omega_2(1/m)] \log n \log m = 0,$$

$$\lim_{\Pi} \omega_1(1/n) \log n = 0, \quad \lim_{\Pi} \omega_2(1/m) \log m = 0,$$

so auch $\lim_{\Pi} \|f - s_{nm}(f)\| = 0$ für $f \in C_{\omega_1 \omega_2}$. Ist eine der drei „ ω -Bedingungen“ nicht erfüllt, so gibt es ein $f \in C_{\omega_1 \omega_2}$, so daß $\lim_{\Pi} s_{nm}(f)$ an der Stelle $(0, 0)$ nicht existiert. Dieser Satz wird spezialisiert, indem für Π die Menge aller Paare bzw. die durch $1/\lambda \leq m/n \leq \lambda$ definierte Menge Π_λ genommen wird. Eine weitere Aussage erhält der Verf. im Falle $\omega_2(u) = u^\gamma$, $0 < \gamma < 1$: Satz 4: Dafür, daß für jedes $f \in C_{\omega_1 u^\gamma}$ $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|f - s_{nm}(f)\| = 0$ gilt, ist $\omega_1(u) = O\left(\frac{1}{\log 1/u \log \log 1/u}\right)$ notwendig, $\omega_1(u) = o\left(\frac{1}{\log 1/u \log \log 1/u}\right)$ hinreichend.
Karl Zeller.

Spezielle Orthogonalfunktionen:

Gatteschi, Luigi: Valutazione dell'errore nella formula di McMahon per gli zeri della $J_n(x)$ di Bessel nel caso $0 \leq n \leq 1$. Riv. Mat. Univ. Parma 1, 347—362 (1950).

Für die Nullstellen der Besselfunktion $J_n(x)$, $0 \leq n \leq 1$, in $x > 0$ gilt nach Mc Mahon

$$j_{nr} = x_r - \frac{4n^2 - 1}{8x_r} + O(r^{-3}), \quad x_r = (2r + n) \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

Verf. präzisiert diese O -Aussage mittels einer Methode von Tricomi. Durch ziemlich langwierige Rechnungen erhält er für das obige $O(r^{-3})$ genauer

$$O(r^{-3}) = r(7,4A^2 + 1,1A)/2^6(2r + n - 1)^3(6r - 5),$$

wobei $A = |4n^2 - 1|$.

Karl Prachar.

Kline, Morris: A Bessel function expansion. Proc. Amer. math. Soc. 1, 543—552 (1950).

Es handelt sich darum, eine nützliche Reihenentwicklung für die Differenz zweier Produkte zu finden, von denen jedes aus einer Besselschen und einer Hankelschen Funktion besteht. Bei der Ableitung der betreffenden Entwicklung geht Verf. von den Potenzentwicklungen für die einzelnen Funktionen aus. Er gibt dann eine physikalische Deutung für das ermittelte Resultat auf Grund der Betrachtung der elektromagnetischen Eigenschwingungen eines Sektors einer Koaxialleitung. In einem Anhang werden einige Zwischenrechnungen zusammengestellt. *M. Strutt.*

Holzer, L.: Zur Laplace-Transformation der Besselschen Funktionen. I, II. *Rev. mat. Hisp.-Amer.*, IV. S. 10, 16—29, 51—71 (1950).

Als Funktion im Integranden der Laplace-Transformation geht Verf. von einem Polynom der Ordnung $k + 2$ aus und betrachtet insbesondere die Nullstellen dieses Polynoms. Als Laplace-Transformation der einzuführenden verallgemeinerten Besselschen Funktion betrachtet Verf. ein Konturintegral einer einzelnen Potenz dividiert durch die oben genannte Potenzreihe. Dieses Konturintegral wird nach dem Cauchyschen Integralsatz behandelt. Verf. stellt durch Anwendung des Multiplikationssatzes der Laplace-Transformation eine Reihe von Formeln zusammen. Hierauf entwickelt er Potenzen und Potenzreihen nach den verallgemeinerten Besselschen Funktionen, wobei er auch auf die Konvergenzverhältnisse der betreffenden Reihen eingeht. Darauf werden die verallgemeinerten Besselschen Funktionen durch ein bestimmtes Integral dargestellt und es werden auch Differentialgleichungen für diese Funktionen abgeleitet. Die bekannten Besselschen Funktionen sind Grenzfälle der hier betrachteten Funktionen. Endlich behandelt Verf. Integrale mit diesen Funktionen. *Max Strutt.*

Hsü, Hsien-Yü: On Sonine's integral formula and its generalization. *Bull. Amer. math. Soc.* 55, 370—378 (1949).

Verf. befaßt sich mit einem unendlichen Integral, dessen Integrand das Produkt dreier Besselscher Funktionen erster Art der Ordnung ν und einer Potenz der Ordnung $1 - \nu$ ist. Dieses Integral war von Sonine berechnet worden. Verf. leitet den betreffenden Ausdruck mit Hilfe der Hankelschen Inversionsformel ab. Als erste Verallgemeinerung dieser Sonineschen Formel betrachtet Verf. ein analoges unendliches Integral, wobei im Integranden das Produkt von vier Besselschen Funktionen wie oben, auftritt. Die Auswertung erfolgt in analoger Weise. Sodann betrachtet Verf. eine Entwicklungsformel von Dougall und behandelt dieselbe mit analogen Mitteln. Diese Dougallsche Formel wird sodann in analoger Weise verallgemeinert wie die Soninesche Formel. *Max Strutt.*

Unger, Heinz: Lommelsche Polynome und Ableitungspolynome bei der numerischen Berechnung von Zylinderfunktionen. (Selbstreferat.) *Arch. Math.*, Karlsruhe 2, 375—381 (1950).

$Z_\nu(z)$ sei eine Zylinderfunktion der Ordnung ν und $Z_\nu^{(p)}(z)$ ihre p -te Ableitung. Es wird berichtet über die numerische Verwendbarkeit der Lommelschen Polynome (siehe Watson, *Theorie of Bessel Functions*, 2. ed., Cambridge 1944) zur Berechnung von $Z_{\nu \pm n}$, $Z_\nu^{(p)}$, $Z_{\nu \pm n}^{(p)}$, $n > 0$, ganz, aus $Z_{\nu-1}$, Z_ν , $Z_{\nu+1}$ für reelle Werte von z . Insbesondere bei der Berechnung der Ableitungen treten dabei mit den Lommelschen verwandte Polynome auf, die Verf. als Ableitungspolynome bezeichnet. *Karl Prachar.*

Toscano, Letterio: Una classe di polinomi della matematica attuariale. *Riv. Mat. Univ. Parma* 1, 459—470 (1950).

Ausgehend von
$$e^{\alpha t + x(1-e^t)} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!} G_i^\alpha(x)$$
 hatte Steffensen [Skand. Ak.

tuarietidskr. 11, 75—97 (1928)] die Polynome $G_n^\alpha(x)$ untersucht; Verf. betrachtet dieselben $G_n^\alpha(x)$, indem als Ausgangspunkt die Formel $G_n^\alpha(x) = x^{-\alpha} e^x (x D)^n x^\alpha e^{-x}$ ($D = d/dx$) und die Entwicklung von $(x D)^n$ (Verf., dies. Zbl. 38, 212) genommen

werden. Es werden die bekannten und weitere neue Eigenschaften bewiesen und insbesondere die Verknüpfungen der $G_n^\alpha(x)$ mit den (verallgemeinerten) Laguerreschen Polynomen $L_n^\alpha(x)$ und (beim Grenzübergang $a \rightarrow 0$, wenn $\alpha = 1/a^2 + \text{const}$, $x = \xi/a + 1/a^2$) mit den Hermiteschen Polynome $H_n(\xi)$. *Bruno de Finetti.*

Ceschino, M. F.: Sur une propriété de certains polynômes d'Appell. *Ann. Soc. Sci. Bruxelles, I. Sér.* **64**, 154—155 (1950).

Die Hermiteschen Polynome $U_m(x)$ bilden eine Sturmsche Kette, und die Nullstellen streben für größer werdende m gegen diejenigen trigonometrischer Funktionen. In der Arbeit wird gezeigt, daß entsprechende Eigenschaften auch die verallgemeinerten Polynome $G_m(x)$ besitzen, die durch

$$e^{ax - a^2/p} = \sum \frac{a^m}{m!} G_m(x) \quad (p \text{ ganz} > 0)$$

definiert sind. Zum Nachweis wird neben der Relation von Appell, $mG_{m-1} = dG_m/dx$, die Differentialgleichung $y^{(p)} - x y' + m y = 0$, der die Polynome genügen, herangezogen. Es folgen Aussagen über die Lage der Nullstellen. *Heinz Unger.*

Chakravarty, Nalini Kanta: On some relations involving Laguerre polynomial $L_n(z)$. *Bull. Calcutta math. Soc.* **42**, 172—176 (1950).

Wie im Titel angegeben, enthält die Arbeit einige Beziehungen zwischen den Laguerreschen Polynomen $L_n(z)$, und zwar wird im ersten Teil, ausgehend von bekannten Beziehungen der konfluenten hypergeometrischen Funktion $W_{k,m}(z)$ von E. T. Whittaker u. a., gezeigt, daß $L_n(u+v)$ nach Reihen, die $L_r(u)$ und $L_r(v)$ enthalten, entwickelt werden kann. Im zweiten Teil werden die Laguerreschen Polynome nach Polynomen von Sonine in der Form, wie sie von K. Basu [*Bull. Calcutta math. Soc.* **35**, 21 u. 127 (1943)] diskutiert sind, entwickelt. Verf. weist darauf hin, daß die von K. Basu eingeführten Sonineschen Polynome sich von den Polynomen $T_m''(X)$ bei Whittaker and Watson (*Course of modern analysis*, Cambridge 1940) etwas unterscheiden. Die Note schließt mit einem Additionstheorem der Laguerreschen Polynome, das durch eine einfache Anwendung der erzeugenden Funktion dieser Polynome erhalten wird. *Rolf Gran Olsson.*

Bagchi, Haridas and Nalini Kanta Chakravarty: On Tschebyscheff's function $T_n(z)$ and its associated equations. *J. Indian math. Soc., n. S.* **14**, 35—42 (1950).

Verff. gehen von der Differentialgleichung und von der Potenzreihe für die Tschebyscheffschen Funktionen aus und schreiben diese als besondere hypergeometrische Funktionen. Als Tschebyscheffsche Funktionen zweiter Art bezeichnen sie Lösungen derselben Differentialgleichungen, deren Potenzreihen nach reziproken Potenzen der unabhängigen Veränderlichen fortschreiten. Für den Quotienten zweier Tschebyscheffscher Funktionen, deren Ordnungen sich um die Einheit unterscheiden, erhalten Verff. einen Kettenbruchausdruck. Die Differentialgleichung erlaubt, eine einfache Beziehung zwischen den Tschebyscheffschen Funktionen erster und zweiter Art abzuleiten. Weiterhin summieren Verff. unendliche Reihen, deren Glieder Produkte einer Potenz und einer Tschebyscheffschen Funktion erster, bzw. zweiter Art sind. Verff. leiten einen Ausdruck für eine Tschebyscheffsche Funktion als unendliche Reihe von Produkten Legendrescher Funktionen ab. Für die Tschebyscheffschen Funktionen zweiter Art ergibt sich ein bestimmter Integralausdruck. Die Tschebyscheffschen Funktionen erster Art genügen gewissen quasi-orthogonalen Beziehungen, welche angeschrieben werden. *Max Strutt.*

Bagchi, Haridas and Nalini Kanta Chakravarty: Some further relations connected with Tschebyscheff's function $T_n(z)$. *J. Indian math. Soc., n. S.* **14**, 43—46 (1950).

Es ist der Zweck dieser Arbeit, vier Beziehungen abzuleiten, welche die Tschebyscheffschen Funktionen mit den Legendreschen Funktionen verknüpfen. Bei den betreffenden Ableitungen gehen Verff. von der Reihenentwicklung eines rezi-

proken Quadratwurzel ausdruckes eines Polynomes zweiten Grades in eine Reihe von Tschebyscheffschen Funktionen aus. Sie benützen die Differentialrelation und die Rekursionsformeln für die Legendreschen Funktionen und erhalten so eine Entwicklungsformel für eine Legendrefunktion in eine unendliche Reihe, deren Glieder Produkte von Tschebyscheffschen und Legendreschen Funktionen sind. Durch einfache Umformungen wird diese Beziehung zu weiteren Gleichungen erweitert, durch welche unendliche Reihen der genannten Art durch andere Reihen solcher Art ausgedrückt werden. Darauf betrachten Verff. die Darstellung einer Tschebyscheffschen Funktion durch ein bestimmtes Integral der komplexen Ebene und erhalten durch Umformungen einen solchen Integralausdruck, der der Laplaceschen Integralformel für die Legendrefunktionen gleicht. *Max Strutt.*

Burchnall, J. L. and A. Lakin: The theorems of Saalschütz and Dougall. Quart. J. Math. (Oxford II. S.) 1, 161—164 (1950).

In dieser Arbeit behandeln Verff. an Hand zweier Beispiele ein Verfahren, durch welches die Werte gewisser hypergeometrischer Funktionen des Argumentes eins direkt aus den Differentialgleichungen abgeleitet werden, welchen diese Funktionen genügen. Es handelt sich in beiden Beispielen um endliche Reihen. Verff. erwähnen aber, daß dieses Verfahren unter gewissen Einschränkungen auch auf unendliche Reihen ausgedehnt werden kann. Als hervorstechender Punkt des vorliegenden Verfahrens erwähnen Verff., daß die endlichen Reihen von Saalschütz nicht als arithmetische Besonderheit figurieren, sondern in natürlicher Weise aus der Rechnung hervorgehen. Das Verfahren kann auch auf Funktionen des Argumentes -1 angewandt werden. *Max Strutt.*

Koschmieder, Lothar: Verallgemeinerte Ableitungen und hypergeometrische Funktionen. Mh. Math., Wien 53, 169—183 (1949).

Verf. beginnt damit, daß er einige allgemeine Regeln über verallgemeinerte Ableitungen mit n komplexen Veränderlichen aufstellt. Als erstes Beispiel für die Anwendung solcher verallgemeinerter Ableitungen befaßt sich Verf. mit einer durch einmalige Integration ausdrückbaren Integraleigenschaft der höheren hypergeometrischen Funktion einer Veränderlichen. Diese Eigenschaft geht fast unmittelbar aus der Anwendung der verallgemeinerten Ableitungen hervor. Das zweite Beispiel befaßt sich mit den von Lauricella eingeführten hypergeometrischen Funktionen von n Veränderlichen und bezieht sich auf ein einfaches mit einer dieser Funktionen gebildetes Integral. Hieraus geht die von Feldheim angegebene Integralgleichung hervor. Verf. gibt für letztere einen neuen Beweis. Beim dritten Beispiel handelt es sich um ein n -faches Integral mit Lauricellaschen Funktionen. Weitere Beispiele ergeben sich aus dem Gestaltswandel der hypergeometrischen Funktionen. *Max Strutt.*

Koschmieder, Lothar: Funktionales Rechnen mit allgemeinen Ableitungen. Österreich. Akad. Wiss., Wien, math.-naturw. Kl., Anz. 1949, Nr. 13, 241—244 (1949).

Verf. knüpft an die vorstehend besprochene Arbeit an. Er geht jetzt von einer Formel von Erdélyi für die Gaußsche Funktion aus. Hieraus ergibt sich, unter Anwendung der früher von ihm entwickelten Formeln, ohne weiteres die Definition von verallgemeinerten Ableitungen. Zur Verallgemeinerung der betreffenden Formeln auf n Veränderliche geht Verf. von einer in passender Weise vervielfachten Lauricellaschen Funktion aus und unterwirft diese dem gleichen Verfahren wie oben. *Max Strutt.*

Buchholz, Herbert: Komplexe Integrale für die parabolischen Funktionen mit dem wesentlich singulären Kern $\exp(-z/2 \cdot \text{Tg } s)$. Math. Z., Berlin 53, 387—402 (1950).

Verf. beginnt mit der Darstellung zweier konfluenter hypergeometrischer Funktionen, die auch als parabolische Funktionen bezeichnet werden, durch drei

Linienintegrale in der komplexen Ebene. Hierauf bildet er die betreffende komplexe Ebene durch die hyperbolische Tangensfunktion auf eine andere Ebene ab und wendet diese Abbildung auf die obengenannten parabolischen Funktionen an. Er gelangt so zu Integraldarstellungen für diese Funktionen, welche zu bemerkenswerten Beziehungen zwischen ihnen führen. Hierauf behandelt er Integraldarstellungen für die Produkte zweier parabolischer Funktionen. Zum Schluß werden die obengenannten Formeln dazu angewandt, die betreffenden parabolischen Funktionen durch Reihen und durch Integrale, z. T. mit Zylinderfunktionen, auszudrücken.

Max Strutt.

Buchholz, Herbert: Die asymptotischen Entwicklungen für die beiden parabolischen Funktionen $M_{\kappa, \mu/z}(z)$ und $W_{\kappa, \mu/z}(z)$ bei großen Werten von κ und z für $-\infty < z/\kappa < +\infty$. Z. angew. Math. Mech. 30, 133—148 (1950).

Verf. geht von den Darstellungen der obengenannten Funktionen als bestimmte Integrale in der komplexen Ebene der unabhängigen Veränderlichen aus und wendet auf diese Integrale die Sattelpunktmethode an. Die Lage der Sattelpunkte und die Sattelpunktswegen werden diskutiert. Mit Hilfe dieser Diskussion ergibt sich für verschiedene Bedingungen in bezug auf den Betrag der unabhängigen Veränderlichen dividiert durch den Parameter jeweils ein asymptotischer Ausdruck für die betreffenden Funktionen bis einschließlich der Glieder zweiter Ordnung des reziproken Parameters. Bei diesen Betrachtungen bleibt der Fall unerledigt, in welchem der Wert der unabhängigen Veränderlichen dividiert durch das 4-fache des Parameters ungefähr gleich eins ist.

Max Strutt.

Breit, G. and M. H. Hull jr.: Asymptotic expansion of irregular Coulomb function for angular momentum zero. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 80, 392—395 (1950).

Von mehreren Autoren wurde bereits rein empirisch gefunden, daß zwischen den asymptotischen Entwicklungen der regulären und irregulären konfluenten hypergeometrischen Funktionen, wie sie im Problem der Coulombschen Streuung auftreten, ein Zusammenhang besteht. Danach erhält man eine asymptotische Entwicklung der irregulären Funktionen, indem man in der asymptotischen Entwicklung der regulären Funktionen gewisse Besselfunktionen durch Zylinderfunktionen zweiter Art ersetzt. Die vorliegende Arbeit gibt einen Beweis dieser für Energieberechnungen nützlichen Tatsache für den Spezialfall der zu Drehimpuls Null gehörigen Funktionen.

M. R. Schafroth.

Wintner, Aurel: On the Whittaker functions $W_{\kappa m}(x)$. J. London math. Soc. 25, 351—353 (1950).

Verf. leitet für die obengenannten Funktionen einen Satz ab, demzufolge die n -te Ableitung entlang der reellen Achse der unabhängigen Veränderlichen von $0 - \infty$ ständig fällt oder steigt, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Die Richtigkeit dieses Satzes ergibt sich auf empirischem Wege aus den berechneten Tafeln für diese Funktionen. Der hier gegebene Beweis stellt diese Eigenschaft in ein allgemeineres Licht.

Max Strutt.

Funktionentheorie:

Lauritzen, Svend: Über ganze transzendente Funktionen, die sich längs jeder vom Nullpunkt ausgehenden Halbgeraden einem bestimmten Grenzwert nähern. Mat. Tidsskr. B, København 1950, Festschr. t. J. Nielsen, 42—48 (1950) [Dänisch].

For the class of functions mentioned above, the author discusses some results previously obtained by A. Roth [Comment math. Helvetici 11, 77—125 (1938); this Zbl. 20, 235].

L. Carleson.

Mandelbrojt, S.: Une inégalité sur les series asymptotiques. Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. Nr. 15 (Analyse harmonique, Nancy 15.—22.6. 1947), 85—91 (1949).

Exposé des résultats obtenus par l'A. dans un autre mémoire [Ann. sci. École norm. sup., III. S. 63, 351—378 (1947)]. Janos Horváth.

Waterman, Daniel: On some high indices theorems. Trans. Amer. math. Soc. 69, 468—478 (1950).

Die Dirichletsche Lückenreihe $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ ($0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$; $\lambda_{n+1}/\lambda_n \geq q > 1$) konvergiere für $s > 0$. Das Kernstück des von A. E. Ingham (dies. Zbl. 16, 397) gegebenen Beweises des Hardy-Littlewoodschen high-indices Theorems (daß aus der Konvergenz von $f(s)$ für $s \rightarrow +0$ die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ folgt) bildet die Ungleichung (1) $|a_n| \leq A_q M$, wobei $|f(s)| \leq M$ für $s > 0$ vorausgesetzt ist und A_q nur von q [und im übrigen nicht von $f(s)$] abhängt. Es ist also auch (2) $|a_n| \lambda_n \leq A_q M'$, wenn $|f'(s)| \leq M'$ für $s > 0$. In Analogie zum high-indices-Theorem und zu dem Inghamschen Beweis bewies A. Zygmund [Trans. Amer. math. Soc. 55, 170—204 (1944)], daß aus der absoluten A -Summierbarkeit der Lückenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ ($c_n \neq 0$ nur für $n = n_\nu$; $n_{\nu+1}/n_\nu \geq q > 1$) ihre absolute Konvergenz folgt. Den Hauptteil des Beweises bildete der Nachweis, daß (3) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq A_q \int_0^{\infty} |f'(s)| ds$ ist, wobei wiederum A_q eine nur von q abhängige Konstante ist. Verf. betrachtet nun allgemeiner die Ungleichung

$$(4) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^m \lambda_n^{m-1} \leq A_{q,m} \int_0^{\infty} |f'(s)|^m ds.$$

(3) entsteht aus (4) für $m = 1$; (2) faßt Verf. als den Grenzfall $m = \infty$ von (4) auf.

Es wird bewiesen: Aus $m > 1$ und $\int_0^{\infty} |f'(s)|^m ds < \infty$ folgt (4), wobei $A_{q,m}$ eine nur von q und m abhängige Konstante ist. Beim Beweis benützt Verf. die Grundgedanken der Beweise von Ingham und Zygmund. In ähnlicher Weise wird der folgende Satz gewonnen: Aus $m > 1$ und $0 < h < \lambda_1$ folgt

$$(5) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^m \leq A_{h,q,m} \int_0^{\infty} (1 - e^{-s})^{m-1} |f'(s)|^m ds,$$

falls das Integral auf der rechten Seite von (5) endlich ist. Verwandte Integrale kommen bei J. E. Littlewood und R. E. A. C. Paley (dies. Zbl. 15, 254), ferner bei Zygmund (a. a. O.) vor.

Ku, Chao-Hao: A note on bounded schlicht functions. Sci. Record, Acad. Sinica 3, 157—159 (1950). Werner Meyer-König.

Si, dans $|z| < 1$, la fonction $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ est holomorphe et univalente, satisfait à $|f(z)| < M$ et ne prend aucune des valeurs d_1, d_2, \dots, d_n variant $\arg(d_{\nu+1}/d_\nu) = 2\pi/n$, alors

$$\text{Max}(|d_1|, |d_2|, \dots, |d_n|) \geq \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{M^n}}\right)^{-2/n}.$$

En faisant $n = 1$ ou $M = \infty$ on retrouve des résultats connus. Jacques Dufrénoy.

Leja, F.: Sur les coefficients des fonctions analytiques univalentes dans le cercle et les points extrémaux des ensembles. Ann. Soc. Polonaise Math. 23, 69—78 (1950).

Es sei $y = f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x^i$ ($c_1 > 0$) eine schlichte Funktion in $K: |x| < 1$. Δ der Bereich, welchen y durchläuft, wenn x in K variiert, Γ der Rand, D , F die Bilder von Δ bzw. Γ bei der Abbildung $z = 1/y$, C die Komplementärmenge von $D + F$ in der z -Ebene, $d(F)$ der transfinite Durchmesser von F , welcher positiv ist.

Verf. definiert nun für jedes $n > 1$ extremale Punktsysteme n -ter Ordnung $\eta_{1n}, \eta_{2n}, \dots, \eta_{nn}$ von F , für welche $V(z_1, \dots, z_n) = \prod_{1 \leq j < k \leq n} |z_j - z_k|$ (z_i aus F) den Maximalwert annimmt und welche so angeordnet sind, daß $\Delta_i(\eta_{1n}, \dots, \eta_{nn}) \leq \Delta_{i+1}(\eta_{1n}, \dots, \eta_{nn})$ ($i = 1, \dots, n-1$) ist, wo $\Delta_j(z_1, \dots, z_n) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n |z_j - z_k|$ ($j = 1, \dots, n$) ist. Jedem solchen System wird die Funktion

$$g_n(y) = y \left/ \left(\prod_{i=1}^n (1 - y \eta_{in}) \right) \right|^{1/n}$$

zugeordnet [die Wurzel wird festgelegt durch $\left(\frac{g_n(y)}{y}\right)_{y=0} = 1$]. Dann wird gezeigt (Satz 1): Es konvergiert $g_n(y)$ in Δ gegen eine in Δ analytische Funktion $g(y)$, und zwar gleichmäßig um jeden Punkt von Δ . Die Funktion $x = d(F)g(y)$ leistet die konforme Abbildung in Δ auf K und es ist $d(F)g(y)$ die inverse Funktion von $f(x)$. — Weiter besitzen die arithmetischen Mittelwerte s_{pn} der p -ten Potenzen von $\eta_{1n}, \dots, \eta_{nn}$ Grenzwerte s_p und die Koeffizienten von $x = d(F)g(y) = d(F)(y + b_2 y^2 + \dots)$ und damit die c_i hängen nur von dem transfiniten Durchmesser $d(F)$ von F und den s_i ab, und zwar ist b_k ($k \geq 2$) ein Polynom in den s_1, \dots, s_{k-1} . Damit ist erkannt, wie die Abbildung von K auf Δ von den geometrischen Eigenschaften von F abhängt.

Edm. Hlawka.

Wolibner, W.: Sur les coefficients des fonctions analytiques univalentes à l'extérieur d'un cercle. *Studia math.* **11**, 126—132 (1950).

In this paper the Bieberbach coefficient problem is discussed for the class Φ of functions $f(z)$ which are schlicht in $|z| > 1$ and have a Laurent development

$$(1) \quad f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{z^n}.$$

The author conjectures that $B_n = \sup_{f \in \Phi} |b_n| = 2/(n+1)$. $B_n \geq 2/(n+1)$ is obvious.

$B_n \leq 2/(n+1)$ has for $n=2$ been proved by Schiffer, and the author discusses some subclasses of Φ for which the conjecture is true. The classes are essentially characterized by a restriction of the form of (1) of an arithmetic nature. As a corollary the following theorem is obtained: if $f_p(z) \in \Phi$ and $f_p(z) \neq 0$ and

$$f_p(z) = z + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{b_s^{(p)}}{z^{s p + r}}, \quad r \neq -1,$$

then $\lim_{r \rightarrow \infty} p |b_s^{(p)}| \leq 2/s$, which would in the excluded case $r = -1$ imply the Bieberbach conjecture for schlicht functions in the unit circle. *L. Carleson.*

Mori, Akira: On a conformal mapping with certain boundary correspondences. *J. math. Soc. Japan* **2**, 129—132 (1950).

Verf. untersucht die konforme Abbildung des Kreises $|z| < 1$ auf ein schlichtes Gebiet D , derart daß eine auf $|z| = 1$ gegebene Punktmenge E in eine Menge von erreichbaren Randpunkten abgebildet wird, welche in einem und demselben Punkte der Ebene liegen. Falls E aus endlich vielen Punkten z_1, \dots, z_n besteht, so bildet

die Funktion (1) $w = z \left/ \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{z}{z_k}\right)^{2a_k} \right.$, wo $\sum_{k=1}^n a_k = 1$ und $a_k > 0$ ($k = 1, \dots, n$) ist,

den Kreis $|z| < 1$ auf ein Gebiet D ab, das aus der Vollebene entsteht, wenn daraus n ins Unendliche laufende radiale Schlitzte, welche miteinander die Winkel $2\pi a_k$ bilden, entfernt werden. (1) ist die einzige durch die Bedingungen $w(0) = 0$, $w'(0) = 1$ normierte Funktion, welche die betreffende Abbildung vermittelt. Das Resultat wird auf den Fall verallgemeinert, daß E unendlich und von der logarithmischen Kapazität Null ist.

Kaarlo Veikko Paatero.

Jørgensen, Vilhelm: Über konforme Abbildung auf der Kugelfläche. Mat. Tidsskr. B, København 1950, Festschr. t. J. Nielsen, 131—137 (1950) [Dänisch].

Let ϱ be the distance from a point on the Riemann z -sphere to the southpole. Let $f(z)$ give a $1-1$ conformal mapping of a ringdomain $\varrho_1 < \varrho < \varrho_2$ onto some domain on the w -sphere. The circle corresponding to ϱ defines two domains on the z -sphere; let $a(\varrho)$ be the area of the domain which increases with ϱ . In the same way the image curve under $f(z)$ of the circle defines a domain of area $A(\varrho)$. With the aid of the area-length method the author proves that $\frac{A(\varrho)}{a(\varrho)} \cdot \frac{\pi - a(\varrho)}{\pi - A(\varrho)}$ increases with ϱ , unless the image domain is a ring domain, and gives some applications of this result. In particular, Koebe's distortion theorem with the best possible constant follows immediately.

L. Carleson.

Heinhold, Josef: Ein Schmiegungsverfahren der konformen Abbildung. S.-B. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1948, 203—222 (1949).

Es handelt sich um ein rechnerisch oder auch graphisch anzuwendendes Verfahren, das einen beliebigen, von einer stückweise glatten einfach geschlossenen Kurve berandeten Außenbereich auf einen kreisnahen Außenbereich abzubilden gestattet, so daß dann etwa das Theodorsensche Verfahren zur Herstellung der Kreisabbildung bequem anwendbar wird. Das Schmiegungsverfahren beruht darauf, daß der im Innern des Komplementärbereiches liegende Einheitskreis mit einem geradlinigen, radial nach außen weisenden „Stachel“ versehen wird, der durch Anwendung von Transformationen des Typus $z+1/z$ „eingezogen“ wird. Durch geschickte Wahl der Stacheln, die man evtl. auch gleichzeitig zu mehreren (in radial-symmetrischer Anordnung) einziehen kann, erreicht man recht günstige Annäherungen, wie Verf. durch mehrere Figuren dartut.

Walter Brödel.

Virtanen, K. I.: Über Abelsche Integrale auf nullberandeten Riemannschen Flächen von unendlichem Geschlecht. Ann. Acad. Sci. Fennicae, A I, Nr. 56, 44 S. (1949).

Die offene Riemannsche Fläche F habe einen Nullrand; es gibt dann auf ihr ebenso wie auf einer geschlossenen Fläche keine nichtkonstante eindeutige harmonische Funktion mit endlichem Dirichletintegral. Über F werden Abelsche Integrale betrachtet, d. h. Funktionen, deren Ableitungen nach einer Ortsuniformisierenden an jeder Stelle rationalen Charakter haben, während die Ableitungen nach z auf F eindeutig sind. Darüber hinaus sollen auf F nur endlich viele Singularitäten vorhanden sein, und das Dirichletsche Integral über $F - G$, wobei G ein alle Singularitäten enthaltendes Teilgebiet ist, soll endlich sein. Diese Integrale sollen aus Elementarintegralen additiv zusammengesetzt werden. Nach Nevanlinna [Ann. Acad. Sci. Fennicae, A I 1, 1—34 (1941); dies. Zbl. 24, 421] können die Integrale erster Gattung in der Form $w = \sum c_k j_k + c_0$ durch ein System von normierten orthogonalen Integralen j_1, j_2, \dots dargestellt werden; Norm und Orthogonalität sind durch das Dirichletsche Integral bestimmt. Verf. führt eine kanonische Basis für F ein und untersucht die zugehörigen Perioden eines Abelschen Integrals, wobei er Ergebnisse von Ahlfors (dies. Zbl. 29, 258) erweitert. Er gibt eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines Integrals erster Gattung mit vorgegebenen Perioden an. Als Beispiel betrachtet er hyperelliptische Flächen mit unendlich vielen reellen Windungspunkten.

Walter Brödel.

Fourès, Léonce: Sur les surfaces de Riemann à arbre topologique régulière-ment ramifié. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 353—355 (1950).

Es handelt sich um einfach zusammenhängende Flächen, deren Windungspunkte über endlich vielen Punkten der z -Ebene liegen und deren repräsentierende Streckenkomplexe eine Menge von Selbstabbildungen zulassen, durch die jeder beliebige Knotenpunkt auf einen solchen eines endlichen Teilsystems abgebildet werden kann. Unter einer gewissen Zusatzbedingung läßt sich entscheiden, ob eine solche

Fläche von parabolischem oder hyperbolischem Typ ist, indem man ihren Streckenkomplex mit dem der universellen Überlagerungsfläche einer algebraischen Riemannschen Fläche von bestimmbarer Geschlechte identifiziert. *Walter Brödel.*

Yosida, Tokunosuke: On the mapping functions of Riemann surfaces. J. math. Soc. Japan **2**, 125—128 (1950).

W sei eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche, die nur über den Grundpunkten x_1, \dots, x_n ($n \geq 3$) verzweigt ist und W^∞ die universelle Überlagerungsfläche der in x_1, \dots, x_n punktierten Ebene. Dadurch entsteht eine Abbildung von W^∞ in W bzw. durch Uniformisierung eine Funktion $w = f(z)$, welche den Einheitskreis $|z| < 1$ auf eine Überlagerungsfläche von $|w| < 1$ bzw. $|w| < \infty$ abbildet, je nachdem W vom hyperbolischen oder parabolischen Typus ist. Im letztern Falle gilt für die Nevanlinnasche Charakteristik

$$T(r) = O\left(\log \frac{1}{1-r}\right), \neq O(1).$$

Im hyperbolischen Fall ist f genau ein Blaschke-Produkt. *Albert Pfluger.*

Garnier, R.: Sur la réduction des solutions du problème de Riemann. Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. Nr. **24** (Algèbre et théorie des nombres, Paris 25. 9.—1. 10. 1949) 199—202 (1950).

Sei A eine quadratische Matrix, deren Elemente stetige Funktionen auf einer Jordankurve C der z -Ebene sind. Es handelt sich darum, zwei Matrizen Φ und Ψ zu finden von folgender Beschaffenheit: Die Elemente von Φ sind regulär analytische Funktionen innerhalb C , jene von Ψ regulär analytisch außerhalb C bis auf einen eventuellen Pol in ∞ , die Determinanten $|\Phi|$ und $|\Psi|$ sind $\neq 0$, und es ist $\Phi = A \Psi$ auf C . Unter gewissen Voraussetzungen über A hat dieses Problem immer Lösungen (J. Plemelj, G. D. Birkhoff). Ist (Φ_0, Ψ_0) eine solche, so sind die andern von der Form $(\Phi_0 P, \Psi_0 P)$, wo P eine Polynommatrix mit konstanter Determinante ist. Verf. zeigt, daß sich eine beliebige Lösung immer und auf eindeutige Weise zu einer „einfachsten“ Lösung reduzieren läßt. *Albert Pfluger.*

Lelong, P.: Sur les séries de Taylor $F(x, y)$ ayant des coefficients entiers. Publ. math., Debrecen **1**, 209—221 (1950).

Pólya (Math. Ann., Berlin **99**, 687—706 (1928)) has proved the following theorem: if $F(z)$ is holomorphic in a domain D containing the origin and at the origin has a Taylor development with integral coefficients and if finally the complement of D by the transformation $z' = z^{-1}$ is mapped onto a set of capacity < 1 , then $F(z)$ is rational. — The assumption means that there exists a sequence of polynomials $P_k(z) = z^{n_k} + \dots$ such that $|P_k(z^{-1})| < a^{n_k}$, $a < 1$, for z on a certain curve C in D . The author proves that in this form it is possible to extend Pólya's theorem to analytic functions of two variables. The variety corresponding to C has in this case to satisfy certain additional, rather complicated but natural topological conditions. *L. Carleson.*

Tornehave, Hans: Some remarks concerning analytic manifolds. Mat. Tidsskr. B, København **1950**, Festschr. t. J. Nielsen, 36—37 (1950).

Sei $y_m = g_m(x_1, \dots, x_{2n})$, $m = 1, \dots, 2n$, Darstellung eines analytischen Flächenstücks $f_1(z_1, \dots, z_{2n}) = \dots = f_n(z_1, \dots, z_{2n}) = 0$. Verf. beweist sehr elegant den Satz: Das charakteristische Polynom der Matrix $(\partial y_i / \partial x_k)$ ist $(\lambda^2 + 1)^n$. *Wolfgang Rothstein.*

Leja, F.: Une nouvelle démonstration d'un théorème sur les séries de fonctions analytiques. Actas Acad. nac. Ci. exact., fis. natur. Lima **13**, 3—7 (1950).

Neuer Beweis des wichtigen, zuerst von Hartogs bewiesenen Satzes [Math. Ann. **62**, 8 (1906)] über das Gebiet der gleichmäßigen Konvergenz von Reihen $\sum a_n(w)z^n$ mit regulären a_n , zum ersten Male ohne Benutzung der Potentialtheorie. Verf. gelingt eine sehr kurze Herleitung des Satzes aus dem von ihm [Math. Ann. **108**, 520 (1933); dies. Zbl. **7**, 62] bewiesenen Satz: „Die Polynomfolge $\{P_n(z)\}$,

wobei der Grad von P_n nicht größer als n ist, sei beschränkt in jedem Punkte eines Kontinuums C . Dann ist die Folge $\{P_n : (1 + \varepsilon)^n\}$ bei beliebigem $\varepsilon > 0$ in einer Umgebung von C gleichmäßig konvergent.“ Der Beweis dieses Satzes scheint allerdings nicht einfach zu sein.

Wolfgang Rothstein.

Calderón, A. P. and A. Zygmund: Note on the boundary values of functions of several complex variables. Contrib. Fourier Analysis, Ann. Math. Studies Nr. 25, 145—165 (1950).

Es handelt sich um einen Beitrag zur Frage der Existenz von Randwerten bei Funktionen $f(z_1, \dots, z_k)$ von k komplexen Veränderlichen z_1, \dots, z_k , die in dem Einheits-Polyzyylinder Γ_k $|z_1| < 1, \dots, |z_k| < 1$, definiert und regulär sind. Der „ausgezeichnete Rand“ D_k wird durch die Gleichungen $z_1 = e^{i\vartheta_1}, \dots, z_k = e^{i\vartheta_k}$ ($0 \leq \vartheta_1, \dots, \vartheta_k \leq 2\pi$) definiert. Die Funktion f besitzt an der Stelle $(e^{i\vartheta_1}, \dots, e^{i\vartheta_k})$ von D_k einen nicht-tangentialen Grenzwert s , wenn $f \rightarrow s$ strebt, sofern jede der Variablen z_j nicht-tangential, vom Innern des Einheitskreises $|z_j| < 1$ her gegen $e^{i\vartheta_j}$ strebt. Dabei werden nur endliche Grenzwerte zugelassen. Verff. knüpfen an den bekannten Satz an, daß f einen nicht-tangentialen Grenzwert für fast alle Punkte $(e^{i\vartheta_1}, \dots, e^{i\vartheta_k})$ besitzt, wenn f in Γ_k beschränkt ist. Dieselbe Folgerung gilt, wenn die Beschränktheit von f in Γ_k durch die Bedingung ersetzt wird, daß f einer Hardy'schen Klasse angehört, d. h. wenn das Integral

$$(1) \quad \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} |f(r_1 e^{i\vartheta_1}, \dots, r_k e^{i\vartheta_k})|^\alpha d\vartheta_1 \dots d\vartheta_k \quad (\alpha > 0)$$

für $r_1 < 1, \dots, r_k < 1$ beschränkt bleibt. Noch allgemeiner läßt sich die Beschränktheit des Integrales (1) durch die Bedingung

$$\int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \log^+ |f| (\log^+ \log^+ |f|)^{k-1} d\vartheta_1 \dots d\vartheta_k = O(1)$$

ersetzen, wenn f für $f(r_1 e^{i\vartheta_1}, \dots, r_k e^{i\vartheta_k})$ und $\log^+ u = \text{Max}(\log u, 0)$ für $u \geq 0$ gesetzt wird. — Den Hauptgegenstand der Arbeit bildet nun der Beweis, daß unter der Bedingung

$$\int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} \log^+ |f(r_1 e^{i\vartheta_1}, \dots, r_k e^{i\vartheta_k})| d\vartheta_1 \dots d\vartheta_k = O(1),$$

welche eine direkte Erweiterung der Bedingung von Nevanlinna-Ostrowski auf den Fall $k > 1$ darstellt, die Funktion f für fast alle Punkte $(e^{i\vartheta_1}, \dots, e^{i\vartheta_k})$ einen sogenannten restringierten nicht-tangentialen Grenzwert besitzt. Dieser bei der Abel-Limitierung mehrfacher Fourier-Reihen nützliche Begriff besagt, daß f einen Grenzwert besitzt, sofern jedes $z_j = r_j e^{i\vartheta_j}$ nicht-tangential derart gegen $e^{i\vartheta_j}$ strebt, daß alle Verhältnisse $(1 - r_j)/(1 - r_h)$ ($j, h = 1, \dots, k$) beschränkt bleiben. — Der Beweis wird auf den folgenden auch an sich bemerkenswerten Satz zurückgeführt: Sei $F(z_1, \dots, z_k)$ eine in dem Polyzyylinder Γ_k definierte reguläre Funktion. Sei E eine auf dem ausgezeichneten Rand D_k von Γ_k gelegene Menge derart, daß für jeden Punkt $(e^{i\vartheta_1}, \dots, e^{i\vartheta_k})$ in E die Funktion F beschränkt bleibt, wenn (z_1, \dots, z_k) restringiert und nicht tangential gegen $(e^{i\vartheta_1}, \dots, e^{i\vartheta_k})$ rückt. Dann besitzt F einen restringierten, nicht-tangentialen Grenzwert für fast alle Punkte von E . — Der letzte Abschnitt enthält weitere Sätze und weiterführende Bemerkungen (z. B. betreffs des Begriffes der vermischten nicht-tangentialen Konvergenz).

Viktor Garten.

Fastperiodische Funktionen:

Bohr, Harald and Borge Jessen: Mean motions and almost periodic functions. Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. Nr. 15 (Analyse harmonique, Nancy 15. — 22. 6. 1947), 75—84 (1949).

Ist $F(t) = a_1 e^{i\lambda_1 t} + \dots + a_n e^{i\lambda_n t}$ ein trigonometrisches Polynom mit komplexen Koeffizienten und reellen, untereinander verschiedenen Exponenten λ_i und überwiegt einer der Summanden von $F(t)$ die anderen beträchtlich, so wird ein stetiger Zweig des Arguments offensichtlich von der Form $\arg F(t) = ct + O(1)$ sein. Dabei ist die sog. mittlere Bewegung c der Exponent des überwiegenden Gliedes. Lagrange stellte das Problem auf, die Variation von $\arg F(t)$ im allgemeinen Fall zu studieren. Verff. berichten zunächst über die historische Entwicklung des Problems seit Lagrange, sodann aber werden vor allem die Resultate der Abhandlung von Jessen und Tornehave [Acta math., Uppsala 77, 137—279 (1945)] referiert. Im Hinblick auf Lagranges Problem enthält die Arbeit als wichtigstes Ergebnis den Satz: Man setze $f(s) = a_1 e^{\lambda_1 s} + \dots + a_n e^{\lambda_n s}$, wobei $s = \sigma + it$, und bilde die (stets konvexe) Jensenske Funktion

$$\varphi(\sigma) = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \log |f(\sigma + it)| dt.$$

Die mittlere Bewegung c von $F(t)$ existiert stets, und es gilt $c = 2^{-1}(\varphi'(-0) + \varphi'(0))$. Das Lagrangesche Problem ist damit gelöst. Der angedeutete Satz ist Spezialfall eines allgemeinen Theorems über gewisse umfangreiche Klassen analytischer fast-periodischer Funktionen.

Wilhelm Maak.

Gewöhnliche Differentialgleichungen:

Coddington, Earl A.: The classical existence theorem of nonlinear analytic differential equations. Proc. Amer. math. Soc. 1, 738—743 (1950).

Date le funzioni $f_j(s; w_1, \dots, w_n)$ ($j = 1, \dots, n$) si abbia

$$f_j = \sum_{k=0}^{\infty} \dots \sum_{m=0}^{\infty} a_j^{k, \dots, m}(s) w_1^k \dots w_n^m$$

con i coefficienti $a_j(s)$, $s = \sigma + it$, definiti nel semipiano $\sigma > 0$ e ivi uniformemente quasi periodici nel senso di Hartman e Wintner (questo Zbl. 34, 58); sia

$$(1) \quad a(s) = \sum_p a_p e^{-\lambda_p s}$$

con gli esponenti λ_p maggiori di una costante positiva assoluta λ_0 , e posto $A_j^{k, \dots, m} = \text{estr. sup.}_{\sigma \rightarrow 0} |a_j^{k, \dots, m}(s)|$ la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \dots \sum_{m=0}^{\infty} A_j^{k, \dots, m} r^k + \dots + m$ risulti convergente per un $r > 0$. In queste ipotesi esiste allora un $l \geq 0$ tale che nel semipiano $\sigma > l \geq 0$ il sistema di equazioni differenziali non lineare, analitico,

$$(2) \quad dw_j/ds = f_j(s; w_1, \dots, w_n) \quad (j = 1, \dots, n)$$

possiede una soluzione $w_1(s), \dots, w_n(s)$ con ciascuna di queste funzioni uniformemente quasi periodica, soddisfacente la condizione

$$(3) \quad \lim_{\sigma \rightarrow \infty} w_j(s) = 0 \quad (j = 1, \dots, n),$$

e qualsiasi soluzione del sistema (2) verificante le (3) coincide con essa. — La dimostrazione si consegue maggiorando le serie ottenute integrando il sistema (2) col metodo delle approssimazioni successive; gli esponenti relativi alla soluzione sono combinazioni lineari con coefficienti interi non negativi degli esponenti che figurano nella (1).

Giovanni Sansone.

Germay, R. H.: Les solutions infiniment voisines des équations récurro-différentielles. Ann. Soc. Sci. Bruxelles, I. Sér. 64, 148—153 (1950).

Per un sistema differenziale ricorrente dipendente da un parametro λ , del tipo $dy_n/dx = F_n(x, y_n, y_{n+1}, \lambda)$ ($n = 1, 2, \dots$) viene mostrata, per mezzo di approssimazioni successive, sotto opportune ipotesi, la continuità della dipendenza da λ della soluzione individuata da prescritte condizioni iniziali.

G. Cimmino.

Tartakovskij, V.: Explizite Formeln für lokale Entwicklungen der Lösungen eines Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 72, 633—636 (1950) [Russisch].

Verf. linearisiert das System

$$(1) \quad \frac{dx_\nu}{dt} = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{\infty} a_{k_1, \dots, k_n}^{(\nu)} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n),$$

indem er es „erweitert“ zu einer Differentialgleichung $dx/dt = x \mathfrak{B}$ für die einzeilige Matrix (2) $x = \|1, x_1, x_2, \dots, x_n, x_1^2, x_1 x_2, \dots, x_n^2, \dots, x_1^{k_1}, x_2^{k_2}, \dots, x_n^{k_n}, \dots\|$, deren Elemente mit $\{x\}_1^{(k_1, \dots, k_n)}$ bezeichnet werden. \mathfrak{B} ist hierbei die „halbendliche“ Differenzierungsmatrix mit den Elementen

$$\{\mathfrak{B}\}_j^{(k_1, \dots, k_n)} = \sum_{\nu=1}^n k_\nu a_{l_1-k_1+\delta_{1\nu}, \dots, l_n-k_n+\delta_{n\nu}}^{(\nu)} \quad \left(\delta_{\mu, \nu} = \begin{cases} 0 & \mu \neq \nu \\ 1 & \mu = \nu \end{cases} \right).$$

Verf. zeigt, daß in einer Umgebung des Ursprungs $x = x_0 \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu!} \mathfrak{B}^\nu t^\nu \right) = x_0 e^{\mathfrak{B}t}$ richtig ist, wobei x_0 analog (2) aus den Anfangswerten gebildet ist, und gibt damit einen konstruktiven Existenzbeweis der Lösung von (1). *M. J. de Schwarz.*

Tartakovski, V.: Explizite Formeln für lokale Entwicklungen in der Nähe von Fixpunkten. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 72, 853—856 (1950) [Russisch].

In Weiterverfolgung der in einer früheren Arbeit (s. vorsteh. Referat) dargelegten Gedankengänge betrachtet Verf. das Differentialgleichungssystem

$$(1) \quad \frac{dx_\nu}{dt} = \sum_{k_1, \dots, k_n=0}^{\infty} a_{k_1, \dots, k_n}^{(\nu)} x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

für den Fall, daß $a_{0,0,\dots,0}^{(\nu)} = 0$ ($\nu = 1, 2, \dots, n$), also der Koordinatenanfang ein Fixpunkt ist. Insbesondere wird der Einfluß einer analytischen, den Ursprung festhaltenden und dort umkehrbaren Koordinatentransformation auf die (1) entsprechende Matrizendifferentialgleichung untersucht und werden die diesbezüglichen Transformationsformeln angegeben. *M. J. de Schwarz.*

Karapandzitch, Georges: Sur une application des intégrales singulières des équations différentielles ordinaires. Vesnik Društva Mat. Fiz. Srbije 2, Nr. 1/2, 37—47 und französ. Zusammenfassg. 47 (1950) [Serbisch].

Moretti, Mario: Una formula e sua applicazione alla risoluzione di una classe di equazioni differenziali lineari. Riv. Mat. Univ. Parma 1, 471—473 (1950).

Verf. beweist, daß der Ausdruck $\sum_{r=0}^n \frac{1}{r!} \frac{d^r}{dx^r} P_n(x) \cdot \frac{d^r}{dx^r} f(x)$, wobei $P_n(x)$ ein beliebiges Polynom n -ten Grades, $f(x)$ eine beliebige n -mal differenzierbare Funktion ist, in eindeutiger Weise in die Form $e^{-x^2/2} \sum_{r=0}^n a_{n,r} \cdot \frac{d^r}{dx^r} \{e^{x^2/2} f(x)\}$ gebracht werden kann, und wendet diese Transformation auf die Differentialgleichung

$$\frac{P_n^{(n)}}{n!} y^{(n)} + \frac{P_n^{(n-1)}}{(n-1)!} y^{(n-1)} + \dots + \frac{P_n''}{2!} y'' + \frac{P_n'}{1!} y' + P_n y = 0$$

an.

M. J. de Schwarz.

Pini, B.: Autovalori e autosoluzioni per i sistemi autoaggiunti di equazioni differenziali lineari omogenee del secondo ordine. Rend. Mat. sue Appl., Univ. Roma Ist. naz. alta Mat., V. S. 8, 351—377 (1949).

Für allgemeinste selbstadjungierte Systeme von n linearen homogenen Differentialgleichungen zweiter Ordnung $(A y' + C y)' + C y' = B y$ — mit symmetrischen Matrizen n -ter Ordnung $A(x)$, $B(x)$ und schiefsymmetrischem $C(x)$ — gibt Verf. zunächst einen vereinfachten Beweis eines Vergleichssatzes von Bliss und Schoenberg (dies. Zbl. 3, 257). Mit Hilfe eines hieraus gewonnenen Oszillations-

theorems beweist Verf. für $B = P - \lambda Q$ Folgendes über die Eigenwerte des Problems

1) $(A y' + C y)' + C y' = (P - \lambda Q) y \quad (a \leq x \leq b), \quad y(a) = y(b) = 0.$

Wenn die Matrix $\begin{vmatrix} A & C \\ -C & P \end{vmatrix}$ positiv definit ist, existiert eine unendliche häufungs-
punktfreie Folge von Eigenwerten

2) $\dots \leq \lambda_{-h} \leq \dots \leq \lambda_{-0} < 0 < \lambda_0 \leq \dots \leq \lambda_h \leq \dots,$

wobei die negativen oder die positiven Eigenwerte fehlen können, je nachdem ob die Matrix Q positiv oder negativ semidefinit ist. Falls in (2) k aufeinanderfolgende Eigenwerte gleich sind ($k \leq n$), so sind die zugehörigen Eigenlösungen linear unabhängig. Der Begriff des Eigenwertes wird dabei — abweichend von Bliss-Schoenberg — vom Verf. in der Weise erweitert, daß jene Werte λ_h von λ gesucht werden, für die eine Anzahl von Punkten x_1, \dots, x_{h-1} auf (a, b) existiert, sowie eine Anzahl von Integralen des Systems (1), von denen eines in a und in x_1 , eines in a und in x_2 , eines in a und in x_{h-1} und eines in a und in b verschwindet. Hierbei kann es vorkommen, daß Punkte der Menge x_1, \dots, x_{h-1} zusammenfallen (höchstens n), zu denen dann linear unabhängige Lösungen gehören. M. J. de Schwarz.

Pini, Bruno: *Sulle proprietà di minimo, e relative conseguenze, delle autosoluzioni di un sistema autoaggiunto di equazioni differenziali lineari omogenee del secondo ordine.* Riv. Mat. Univ. Parma 1, 319—345 (1950).

Im Anschluß an die vorstehend besprochene Arbeit betreffend Eigenwerte und -lösungen eines selbstadjungierten Systems

$$(A y' + C y)' + C y' = (P - \lambda Q) y, \quad y(a) = y(b) = 0, \quad a \leq x \leq b,$$

wobei A, P, Q, C quadratische Matrizen n -ter Ordnung — A, P, Q symmetrisch, C schiefsymmetrisch — sind, beweist Verf. die Minimumseigenschaft der Eigenlösungen. Diese kann folgendermaßen ausgedrückt werden. Innerhalb der Gesamtheit der stetig differenzierbaren, in a und b verschwindenden Vektoren y mit den Orthogonalitätsbedingungen

$$\int_a^b Q y \times y_0 dx = 0, \quad \int_a^b Q y \times y_1 dx = 0, \dots, \quad \int_a^b Q y \times y_{r-1} dx = 0$$

unter der Voraussetzung $\lambda_{r-1} < \lambda_r$ gilt

$$I_r(y) = \int_a^b (A y' \times y' - 2 C y' \times y + (P - \lambda_r Q) y \times y) dx \geq 0,$$

wobei das Minimum Null nur für $y = \sum_{i=0}^{p-1} a_i y_{r+i}$ mit beliebigen konstanten a_i und linear unabhängigen, zum p -fachen Eigenwert λ_r gehörigen Eigenvektoren y_{r+i} angenommen wird. — Mit Hilfe eines Maximum-Minimum-Theorems beweist Verf. ferner eine asymptotische Formel für die Eigenwerte. Das System der Eigenlösungen ist vollständig und jeder stetige, stetig differenzierbare, in a und b verschwindende Vektor y kann in eine Reihe $\sum_{v=0}^{\infty} c_v y_v \left(c_v = \int_a^b Q y_v \times y dx \right)$, entwickelt werden. M. J. de Schwarz.

Koschmieder, Lothar: *Ein Gefüge von Differentialgleichungen, durch elliptische Funktionen integriert.* Mh. Math., Wien 54, 265—283 (1950).

L'A. studia il sistema $dU/dx = V^2, \quad dV/dx = -U^2$ che ha per integrale

$$U = C \frac{\wp' [(C/\sqrt{3})(z-z_0)] - \sqrt{3}}{\wp' [(C/\sqrt{3})(z-z_0)] + \sqrt{3}} = C \wp \left[-\frac{C}{\sqrt{3}}(z-z_0) \right],$$

$$V = C \frac{2\sqrt{3} \wp [(C/\sqrt{3})(z-z_0)]}{\wp' [(C/\sqrt{3})(z-z_0)] + \sqrt{3}} = C \psi \left[-\frac{C}{\sqrt{3}}(z-z_0) \right],$$

con z_0 e C costanti, essendo \wp la funzione equianarmonica di Weierstrass con gli invarianti $g_2 = 0, g_3 = 1$, e perciò con i periodi principali $2\omega = 2 \int_{4^{-\frac{1}{4}}}^{\infty} (4s^3 - 1)^{-\frac{1}{4}} ds$,

$2\epsilon\omega$ [$\epsilon = \exp(2\pi i/3)$]. — Tra le U e V sussiste la relazione $U^3 + V^3 = C^3$. La relazione analoga per il sistema $du/dx = v^p, dv/dx = -u^p$ diventa $u^{p+1} + v^{p+1} = \text{cost.}$; per questo sistema l'A. avverte che la teoria ai fini delle applicazioni fisiche e tecniche è stata sviluppata da R. Grammel [questo Zbl. 31, 120; 33, 58]. — Interessanti sono le applicazioni dell'A. delle formule di moltiplicazione complessa delle $\wp(u)$ e $\psi(u)$ per la dimostrazione del teorema di reciprocità dei residui biquadratici e cubici.

Giovanni Sansone.

Wintner, Aurel: On the harmonic analysis of hypergeometrical functions. Math. Notae, Rosario 9, 78—87 (1949).

Bei der trigonometrischen Form $(y' \sin \vartheta)' + \lambda y \sin \vartheta = 0$ ($' = d/d\vartheta$) der Legendreschen Differentialgleichung $\{(1-x^2)y'\}' + \lambda y = 0$ ($' = d/dx, x = \cos \vartheta$) für das Intervall $-1 < x < 1$ kann die allgemeine Lösung durch Fourierreihenansatz $y(\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos n\vartheta$ erhalten werden (zweigliedrige Rekursionen), was im Grunde

darauf beruht, daß die determinierende Fundamentalgleichung an beiden singulären Stellen der Bestimmtheit $x = \pm 1$ die Form $\mu^2 = 0$ hat. Für die hypergeometrische Differentialgleichung $x(1-x)\ddot{y} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]\dot{y} - \alpha\beta y = 0$ im Intervall $0 < x < 1$ ist dies direkte Verfahren nicht allgemein durchführbar. Bringt man jedoch die Differentialgleichung durch geeignete Substitution $y = v u$ auf die Gestalt $(A + B \cos \vartheta + C \cos 2\vartheta)u'' + (D + E \cos \vartheta + F \cos 2\vartheta)u' = 0$ ($\cos \vartheta = 2x - 1, ' = d/d\vartheta$), so ist der entsprechende Ansatz möglich; eine nähere Durchführung an anderer Stelle wird angekündigt.

Friedrich Wilhelm Schäfke.

Miller, Kenneth S.: On iterative methods in linear differential equations. Trans. Amer. math. Soc. 69, 195—207 (1950).

Verf. beschäftigt sich mit der Lösung des inhomogenen Randwertproblems

$$L u \equiv u^{(n)}(x) + p_1(x) u^{(n-1)}(x) + \dots + p_n(x) u(x) = 0 \quad (n > 2),$$

$$U_{\alpha}(u) \equiv \sum_{i=0}^{n-1} A_{\alpha i} u^{(i)}(0) + \sum_{i=0}^{n-1} B_{\alpha i} u^{(i)}(c) = C_{\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n)$$

durch einen Iterationsprozeß. Dabei werden die Koeffizienten $p_i(x)$ als reell und stetig in $[0, c]$ und das homogene Problem $L u = 0, U_{\alpha}(u) = 0$ ($\alpha = 1, 2, \dots, n$) als unlösbar vorausgesetzt. — Sei $L = M + N$ zerlegt, der Differentialoperator M höchstens von der Ordnung $n-2$, $N u = 0, U_{\alpha}(u) = 0$ ($\alpha = 1, 2, \dots, n$) unlösbar, $u_0(x)$ n -mal stetig differenzierbar, $U_{\alpha}(u_0) = C_{\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, \dots, n$), so konstruiert Verf. die Folgen

$$\varepsilon_m(x) = L u_m(x), \quad \Delta_m(x) = N^{-} \varepsilon_m(x) \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

$$u_m(x) = u_{m-1}(x) - \Delta_{m-1}(x) \quad (m = 1, 2, \dots)$$

und beweist zunächst $\varepsilon_m(x) = -MN^{-}\varepsilon_{m-1}(x), U_{\alpha}(u_m) = C_{\alpha}$ ($\alpha = 1, 2, \dots, n$) ($m = 1, 2, \dots$). Dabei bedeutet $N^{-}v$ die Lösung von $N u = v, U_{\alpha}(u) = 0$ ($\alpha = 1, 2, \dots, n$). — Verf. zeigt weiter, daß zu gegebenem L und gegebenen $n-1$ Randbedingungen M, N und die letzte Randbedingung so gewählt werden können, daß $T = -MN^{-}$ ein Integraloperator mit einem reellen, stetigen, symmetrischen Kern wird. Unter weiteren Voraussetzungen über die Randbedingungen und die Länge c des Grundintervalls wird dann die gleichmäßige Konvergenz der $u_m(x)$ gegen die Lösung des Randwertproblems bewiesen. — Verf. sieht den Wert der Symmetrie des Operators T vor allem darin, daß in diesem Falle eine bequeme Abschätzung des Fehler

$$\int_0^c \varepsilon_m(x)^2 dx \quad \text{auch nach unten möglich wird.}$$

Friedrich Wilhelm Schäfke.

Campbell, R.: Sur quelques équations de la physique mathématique. Bull. Sci. math., II. S. 74, 145—153 (1950).

Verf. weist darauf hin, daß bei der Whittakerschen Differentialgleichung

$$y'' + (a + b \cos 2x + c \cos 4x) y = 0,$$

bei der trigonometrischen Form

$$(1 - k^2 \sin^2 v) \frac{d^2 y}{dv^2} - k^2 \sin v \cos v \frac{dy}{dv} + [h - n(n+1)k^2 \sin^2 v] y = 0$$

der Laméschen Differentialgleichung $y'' + (a + b \operatorname{sn}^2 x) y = 0$ und bei der assoziierten Mathieschen Differentialgleichung

$$y'' + \left(a + \frac{v(1-v)}{\sin^2 x} + k^2 \cos^2 x \right) y = 0$$

der Fourierreihenansatz für die 2π -periodischen Lösungen bzw. bei der letzten Differentialgleichung die Entwicklung nach gewissen trigonometrischen Polynomen für ausgezeichnete Werte eines der drei Parameter auf Grund der entstehenden Rekursionsformeln charakteristische Gleichungen zwischen den beiden anderen liefert, die sofort einen algebraischen Faktor abspalten (mit — abgesehen von der letzten Differentialgleichung — zugehörigen elementaren Integralen), während dies bei ihrem gemeinsamen Spezialfall, der Mathieschen Differentialgleichung $y'' + (p - 2q \cos 2x) y = 0$, nicht eintritt. Friedrich Wilhelm Schäfke.

Mikołajski, Z.: Sur les transformations des systèmes d'équations différentielles linéaires. Ann. Soc. Polonaise Math. 23, 272—278 (1950).

Le funzioni $F^i(\tau, \xi_1, \dots, \xi_n)$ siano continue nello spazio S_{n+1} dei punti $(\tau; \xi_1, \dots, \xi_n)$ insieme alle loro derivate parziali del primo ordine, risulti $\left| \frac{d(F^1, F^2, \dots, F^n)}{d(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)} \right| \neq 0$, e la trasformazione $T: x_i = F^i(\tau; \xi_1, \dots, \xi_n)$, $t = \tau$ ammetta in tutto S_{n+1} la trasformazione inversa $T^{-1}: \xi_i = f^i(t; x_1, \dots, x_n)$, $\tau = t$. — Sussiste allora il teorema: Se applicando T^{-1} ad un qualunque sistema differenziale lineare omogeneo a coefficienti costanti $\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$ si ottiene ancora un sistema differenziale omogeneo a coefficienti costanti, allora T ha la forma

$$x_i = \sum_{k=1}^n e^{\sigma \tau} \gamma_{i,k} \xi_k, \quad t = \tau \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad \sigma \text{ e } \gamma_{i,k} \text{ costanti.}$$

Giovanni Sansone.

Borg, Göran: Über die Ableitung der S -Funktion. Math. Ann., Berlin 122, 326—331 (1950).

Heinz, Erhard: Zur Frage der Differenzierbarkeit der S -Funktion. Math. Ann., Berlin 122, 332—333 (1950).

Sei $q(x)$ stetig für $0 \leq x < \infty$ und $y(x; k)$ für $x \geq 0$, $k > 0$ durch $y'' + (k^2 - q(x)) y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ definiert. Ist $\int_0^\infty |q(x)| dx < \infty$, so gilt bekanntlich mit gewissen Konstanten $M_1(k)$, $M_2(k)$ bei $x \rightarrow +\infty$

$$y(x; k) = M_1(k) e^{ikx} + M_2(k) e^{-ikx} + o(1);$$

$S(k) = M_1(k)/M_2(k)$ heißt dann die S -Funktion des Problems. Ist auch

$$\int_0^\infty x |q(x)| dx < \infty,$$

so besitzt $S(k)$ für $k > 0$ eine stetige Ableitung. — Die beiden Noten untersuchen die Ableitung $S'(k)$ unter den nicht unter die letzte Bedingung fallenden Voraussetzungen: $q(x) = \frac{\varphi(x)}{g(x)}$, $\varphi(x)$ fastperiodisch, $\varphi(x) \sim \sum_{\nu=1}^\infty A_\nu \sin 2\alpha_\nu x$,

$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_{\nu}^2} < \infty$, $g(x)$, $g'(x)$ stetig, $g(x) > 0$ für $0 \leq x < \infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)x^{-2} = 1$,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g'(x)(2x)^{-1} = 1$. — In der ersten Note wird bewiesen: 1. $S'(k)$ existiert
 und ist stetig für $k \neq \alpha_{\nu}$. 2. Es gilt $\lim_{k \rightarrow \alpha_{\nu}} \frac{1}{\log |k - \alpha_{\nu}|} S'(k) = \frac{i}{2\alpha_{\nu}} (1 + S(\alpha_{\nu})^2) A_{\nu}$.
 3. Ist $\varphi(x) = \sum_{\nu=1}^n A_{\nu} \sin 2\alpha_{\nu} x$, dann ist die Menge der Funktionen φ , die für
 ein festes α_{ν} zur Relation $1 + S(\alpha_{\nu})^2 = 0$ führen, eine Nullmenge im Verhältnis
 zur ganzen Menge. — Die zweite Note zeigt ergänzend: 4. Ist $1 + S(\alpha_{\nu})^2 = 0$
 so gilt $S'(\alpha_{\nu} + 0) - S'(\alpha_{\nu} - 0) = \pi A_{\nu}/\alpha_{\nu}$. Nach 2. und 4. ist in jedem Falle
 $S(k)$ an allen Stellen $k = \alpha_{\nu}$ nicht differenzierbar und $\varphi(x)$ durch $S(k)$ eindeutig
 bestimmt.

Friedrich Wilhelm Schäfke.

Gradstein, I. S.: Nichtlineare Differentialgleichungen mit kleinen Faktoren bei gewissen Ableitungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 66, 789—792 (1949) [Russisch].

Verallgemeinerung früherer Ergebnisse des Verf. [dies. Zbl. 33, 369 und Doklady Akad. Nauk, n. S. 65, 789—792 (1949)]: Man betrachtet zunächst neben dem System (1) $h_i(x, y, t) = 0$ ($i = 1, \dots, \mu$) (x und y m - bzw. μ -dimensionale Vektoren mit den Koordinaten x_j bzw. y_k , h_i mit stetigen partiellen Ableitungen 1. Ord. nach allen Variablen und 2. Ord. nach den y_k) das System (2) $dy_i/d\tau = h_i(x, y, t)$ ($i = 1, \dots, \mu$; τ unabhängige Variable, x und t Parameter). R sei die Menge der Punkte (x, y, t) , die (1) erfüllen und in denen die Matrix $(\partial h_i/\partial y_k)$ lauter Eigenwerte mit negativen Realteilen besitzt. Jeder Punkt von R ist verallgemeinerter Brennpunkt bzw. Knoten von (2). Jeder einen Punkt (x^*, y^*, t^*) von R enthaltende Unterraum $x = x^*$, $t = t^*$ des (x, y, t) -Raumes heißt Phasenebene. Dem Punkte (x^*, y^*, t^*) wird als „durch diesen Punkt (in der Phasenebene $x = x^*$, $t = t^*$) abgetrennte Menge“ die Menge der Punkte (x^*, Y^*, t^*) zugeordnet, derart daß die von (x^*, Y^*, t^*) für $\tau = 0$ ausgehende Lösung von (2) für $\tau \rightarrow \infty$ dem Punkte (x^*, y^*, t^*) beliebig nahekommt. — Mit diesen Begriffsbildungen wird ein Zusammenhang zwischen den Lösungen des Systems (3) $dx_i/dt = f_i(x, y, t)$, $0 = h_j(x, y, t)$ ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, \mu$; h_j wie oben, f_i mit stetigen partiellen Ableitungen 1. Ord.) und des Systems (4) $dX_i/dt = f_i(X, Y, t)$, $\eta dY_j/dt = h_j(X, Y, t)$ ($i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, \mu$; $\eta > 0$ ein hinreichend kleiner Parameter) hergestellt. Es wird im wesentlichen bewiesen: Ist $x^0(t)$, $y^0(t)$ ein für $t_0 \leq t \leq T$ auf R verlaufender Lösungsbogen von (3) und gehört $(x^0(t_0), Y^0, t_0)$ der von $(x^0(t_0), y^0(t_0), t_0)$ abgetrennten Menge an, so gilt für die von $(x^0(t_0), Y^0, t_0)$ ausgehende Lösung $X(t, \eta)$, $Y(t, \eta)$ des Systems (4): $\lim_{\eta \rightarrow +0} X(t, \eta) = x^0(t)$
 $(t_0 \leq t \leq T)$, $\lim_{\eta \rightarrow +0} Y(t, \eta) = y^0(t)$ ($t_0 \leq t \leq T$).

Fritz Reutter.

Persidskij, K. P.: Über das Spektrum der charakteristischen Zahlen. Priklad. Mat. Mech., Moskva 14, 635—650 (1950) [Russisch].

The author continues his investigation [cf. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 63, 229—232, (1948)] of the denumerable system $\frac{dx_s}{dt} = \sum_{r=1}^{\infty} p_{sr}(t) x_r$ ($s = 1, 2, \dots$), where the $p_{sr}(t)$ are real or complex and are continuous for $t \geq 0$. It is mostly assumed that there is a constant a such that $\sum_{r=1}^{\infty} |p_{sr}(t)| \leq a$ ($s = 1, 2, \dots$) for $t \geq 0$. The „norm“ of a solution $x_1(t)$, $x_2(t)$, ... is defined as the function $x(t) = \sup [|x_1(t)|, |x_2(t)|, \dots]$. The characteristic number, in Liapounoff's sense, of this solution is a number α , such that $x(t) \exp(\beta t) \rightarrow 0$ for $\beta < \alpha$, and is unbounded for $\beta > \alpha$. The set of characteristic numbers for all solutions form the spectrum of the equation-system; it is shown that the spectrum is contained in $(-a, a)$. Theorem 1 asserts the inequality $x(t) \leq x(0) B \exp(-rt)$, assuming that the spectrum has no point in the half-interval $(-\infty, r)$; here B is a constant depending only on r . Theorem 2 draws the consequence regarding (asymptotic) stability of the null-solution. Theorem 3 is a slight variant on Theorem 1. In the rest of the paper it is assumed that the $p_{sr}(t)$ are either constant or periodic with a common period. Theorem 4 adapts Theorem 1 to this case. Theorems 5 and 6 deal with perturbations of the system, not necessarily linear, and give conditions for the stability of the null-solution. Theorem 7 relates to the effect of a linear perturbation upon the spectrum.

Frederik V. Atkinson.

Titchmarsh, E. C.: Eigenfunction problems with periodic potentials. Proc. R. Soc., London, Ser. A 203, 501—514 (1950).

Verf. befaßt sich mit dem Problem der Entwicklung einer „beliebigen“ Funktion nach den Eigenfunktionen eines Eigenwertproblems bei einer linearen homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit periodischem Koeffizienten. Bei der Ableitung der betreffenden Entwicklungsformel macht Verf. vom Cauchyschen Integralatz in der komplexen Ebene des Eigenwertparameters Gebrauch. Er geht sodann auf die Beziehungen zwischen diesen Eigenwertproblemen und anderen analogen Problemen. Es werden für die Lösungen der Differentialgleichung asymptotische Formeln mit Restabschätzungen abgeleitet. Zum Schluß behandelt Verf. die Konvergenz der oben genannten Reihenentwicklungen. Leider hat Verf. die Ergebnisse der Literatur nur sehr zum Teil berücksichtigt. Insbesondere scheint er eine Arbeit des Referenten (dies. Zbl. 30, 54), in welcher analoge Probleme in verallgemeinerter Form behandelt werden und in welcher noch weitere Literatur über das vom Verf. behandelte Problem zitiert ist, übersehen zu haben.

Max Strutt.

Cambi, Enzo: The simplest form of second-order linear differential equation, with periodic coefficient, having finite singularities. Proc. R. Soc. Edinburgh A 33, 27—51 (1950).

Verf. befaßt sich mit einer Hillschen Differentialgleichung, deren periodischer Koeffizient gleich dem reziproken Wert einer Summe einer Konstanten und einer Cosinusfunktion ist. Für die Lösung dieser Differentialgleichung setzt er eine Fouriersche Reihe an. Die Koeffizienten dieser Reihe ergeben sich in üblicher Weise aus Kettenbruchentwicklungen. Ebenfalls in üblicher Weise ergibt sich für die Werte des Parameters unter bestimmten Bedingungen für die Lösung ein unendlicher Kettenbruch. Die Lösungen, welche sich aus dieser Rechnung ergeben, werden für verschiedene Werte des Parameters diskutiert, und diese Diskussion wird mit Hilfe eines numerischen Beispiels erläutert. Hierauf wendet Verf. sich den Stabilitätsbedingungen der Lösungen in der Parameterebene zu, wobei zu bemerken ist, daß die Parameterwerte durchaus reell angenommen werden. In einem Diagramm werden diese Stabilitätsbedingungen erläutert. Ausgehend von der algebraischen Form der Differentialgleichung diskutiert Verf. die Lösungen als Funktionen in der Ebene der komplexen unabhängigen Veränderlichen. Er wendet sich dann dem Fall zu, daß der periodische Koeffizient der Differentialgleichungen unendlich große Werte annehmen kann, und diskutiert auch in diesem Fall kurz die möglichen Lösungen.

Max Strutt.

Gusarova, R. S.: Über die Beschränktheit der Lösungen einer linearen Differentialgleichung mit periodischen Koeffizienten. Priklad. Mat. Mech., Moskva 13, 241—246 (1949) [Russisch].

Die Arbeit beschäftigt sich mit Stabilitätskriterien für die Differentialgleichung 1) $y'' + p(x)y = 0$, wo $p(x)$ eine reelle stetige Funktion mit der Periode π ist, die im folgenden stets als ≥ 0 vorausgesetzt sei. Bekanntlich ist (1) stabil (sämtliche Lösungen beschränkt), falls $p(x)$ für ein ganzes $n \geq 0$ die Ungleichung $n^2 \leq p(x) \leq (n+1)^2$ erfüllt (vgl. S. Wallach, dies. Zbl. 31, 397), oder, nach Ljapunov, falls $p(x) \geq 0$, $\pi \int_0^\pi p(x) dx \leq 4$. — Verf. beginnt mit der Behauptung, daß der Beweis von S. Wallach unrichtige Überlegungen benutze, und leitet den Satz aus einem Kriterium von N. E. Žukovskij [Mat. Sbornik 16, 582—592 (1892)] her. Bem. d. Ref.: Der Beweis von S. Wallach ist jedoch völlig in Ordnung. — Verf. beweist dann: (1) ist stabil, falls eine der drei Bedingungen erfüllt ist: (I) $p(x) \geq 1$, $\int_0^\pi p(x) dx \leq 12$; (II) die Funktion $p(x)$ wechselt das Vorzeichen, es ist

$\int_0^\pi p(x) dx \geq 0$, ihre Schwankung in $[0, \pi]$ ist ≤ 1 ; (III) die Funktion $p(x)$

wechselt das Vorzeichen, es ist $\int_0^\pi p(x) dx \geq 0$ und, falls $-a^2 = \min p(x)$ ge-

setzt wird, $\pi \int_0^\pi (p(x) + a^2) dx \leq 4$.

Friedrich Wilhelm Schäfke.

Stepanov, V. V.: Über die Lösungen einer linearen Gleichung mit periodischen Koeffizienten bei Vorhandensein einer periodischen störenden Kraft. Priklad. Mat. Mech., Moskva 14, 311—312 (1950) [Russisch].

Nehmen wir an, daß $p(t)$ periodisch mit der Periode 2π und $f(t)$ periodisch sei. Nehmen wir des weiteren an, daß die Differentialgleichung (1) $\ddot{y} + p(t)y = 0$ beschränkte, nicht periodische Lösungen habe [deshalb hat (1) Lösungen x_1, x_2 , welche zu den Exponenten $\pm i\alpha$ gehören, wo α eine irrationale Zahl ist]. Unter diesen Voraussetzungen hat auch die Gleichung (2) $\ddot{y} + p(t)y = f(t)$ beschränkte Lösungen. Für die Beweise werden Entwicklungen in Fourierreihen herangezogen.

Lamberto Cesari.

Malkin, I. G.: Zur Theorie der periodischen Lösungen von Poincaré. Priklad. Mat. Mech., Moskva 13, 633—646 (1949) [Russisch].

L'A. considère le système réel:

$$(1) \quad dx_s/dt = X_s(t, x_1, \dots, x_n, \mu), \quad s = 1, 2, \dots, n,$$

où X_s est une fonction continue et périodique de t (période 2π) et admettant des dérivées premières continues en x_s ($s = 1, 2, \dots, n$) et μ (μ assez petit, les x_s appartiennent à un domaine G). Soit le système „générateur“:

$$(2) \quad dx_s^0/dt = X_s(t, x_1, \dots, x_n, 0), \quad s = 1, 2, \dots, n.$$

Dans le cas où les X_s sont analytiques en x_s et μ , Poincaré a démontré qu'à la solution périodique de (2) il correspond une, et une seule, solution périodique de (1). Toutes les fois qu'un certain déterminant fonctionnel D est différent de zéro. Dans un travail antérieur (Méthodes de Liapounov et de Poincaré dans la théorie des oscillations non linéaires, Moscou 1949), l'A. a discuté la question dans le cas où $D = 0$, en conservant l'hypothèse d'analyticité des X_s en x_s et μ ; le présent mémoire étend ces conclusions au cas où les X_s sont seulement assujettis aux hypothèses de régularité, explicitées ci-dessus.

Julien Kravtchenko.

Malkin, I. G.: Schwingungen von Systemen mit einem Freiheitsgrad, die sich wenig von Ljapunovschen Systemen unterscheiden. Priklad. Mat. Mech., Moskva 12, 561—596 (1948) [Russisch].

L'A. se propose l'étude des solutions périodiques en t , du système différentiel réel

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = -\lambda y - \frac{\partial H}{\partial y} + \mu f(x, y, t, \mu), \quad \frac{dy}{dt} = \lambda x + \frac{\partial H}{\partial x} + \mu F(x, y, t, \mu),$$

où λ est une constante > 0 ; $H(x, y)$ est une fonction holomorphe à l'origine, qui s'y annule avec ses dérivées des deux premiers ordres; μ est un paramètre petit et F et f sont holomorphes en x, y, μ dans le domaine de $x = y = \mu = 0$; les coefficients des développements tayloriens de f et F sont des fonctions continues, périodiques (période 2π) de t , développables en série de Fourier. — Dans le cas particulier, dit quasi-linéaire, où $H \equiv 0$, on sait aujourd'hui déterminer toutes les solutions périodiques de (1); mais l'allure de ces résultats est profondément altérée dès que $H \neq 0$ comme le montre l'exemple de l'équation bien connue de Duffing. L'A. parvient cependant, à construire toutes les solutions périodiques de (1) dans le cas où le système „générateur“ (2), associé à (1) [et que l'on déduit de (1) en y faisant $\mu = 0$] possède la propriété de Liapounov [c'est-à-dire si (2) admet une intégrale première de Liapounov et si l'équation caractéristique correspondante admet au moins un couple de racines imaginaires pures]. Voici les conclusions de

A. Dans le cas qu'il envisage, on sait former, d'après Poincaré, toutes les solutions périodiques (de période correspondante, d'après la formule de Poincaré-Liapounov, $2\pi/n$) de (2) du type $x_0^{(n)} = x^{(n)}(t - \alpha)$, $y_0^{(n)} = y^{(n)}(t - \alpha)$, dépendant du paramètre α . Posons: $f_0 = f(x_0^{(n)}, y_0^{(n)}, t, 0)$; $F_0 = F(x_0^{(n)}, y_0^{(n)}, t, 0)$. Alors la condition nécessaire pour assurer l'existence d'une solution périodique de (1), se réduisant à $x_0^{(n)}, y_0^{(n)}$ pour $\mu = 0$ est que α soit racine de l'équation:

$$\int_0^{2\pi} \left(f_0 \frac{dy_0^{(n)}}{dt} - F_0 \frac{dx_0^{(n)}}{dt} \right) dt = 0.$$

A chaque racine simple α , il correspond une solution périodique et une seule, de (1), analytique en μ . Le cas de la solution périodique de (1) se réduisant, pour $\mu = 0$ à la solution $x = y = 0$, nécessite un examen spécial. Si $\lambda \neq n$, n entier, l'A. forme des développements convergents pour représenter l'intégrale en cause. Si $\lambda = n$, il se produit des circonstances singulières (résonance) que l'A. élucide complètement. — Ceci fait, l'A. indique les critères de stabilité au sens de Liapounov pour les solutions périodiques qu'il vient de construire. — Ces généralités sont illustrées par la discussion détaillée du système (1) avec

$\frac{\partial H}{\partial y} = 0$; $\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{\gamma}{k} x^3 (y > 0, k > 0)$; $f = 0$; $F = -\frac{a}{k} \cos p t - \frac{b}{k} \cos q t - 2h y$ ($h > 0, p$ et q entier); l'A. examine les cas où $n = p$ et $n = q$.

Julien Kravtchenko.

Malkin, I. G.: Schwingungen von Systemen mit mehreren Freiheitsgraden, die sich wenig von Ljapunovschen Systemen unterscheiden. Priklad. Mat. Mech., Moskva 12, 673—690 (1948) [Russisch].

Envisageons le système réel: (1) $dx_s/dt = F_s + \mu f_s$, $s = 1, 2, \dots, n$, où: μ est un paramètre petit; $F_s = \sum_{i=1}^n q_{si} x_i + X_s(x_1, x_2, \dots, x_n)$, les X_s étant holomorphes dans le domaine de l'origine; $f_s = f_s(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu, t)$ est holomorphe en $x_1, x_2, \dots, x_n, \mu$ dans le domaine de l'origine, les coefficients du développement étant des fonctions périodiques de temps (période 2π). L'A. étend à ces systèmes les conclusions d'un travail antérieur (cf. le rapport précéd.) *Julien Kravtchenko.*

Volk, I. M.: Über periodische Lösungen autonomer Systeme. Priklad. Mat. Mech., Moskva 12, 29—38 (1948) [Russisch].

L'A. étudie les solutions périodiques du système (I) $dx_v/dt = X_v(x_1, \dots, x_n, \mu)$ ($v = 1, 2, \dots, n$) où les X_v sont analytiques en x_i dans le domaine G ($a_i \leq x_i \leq b_i$, $i = 1, 2, \dots, n$) et méromorphes en μ dans le domaine $|\mu| \leq r$ (μ étant un paramètre réel). Supposons que le système „simplifié“ (au sens de l'A., cf. ce Zbl. 37, 61 et le rapport suivant) admette une solution périodique, de période $2\pi/\omega$ (ω pouvant être une fonction méromorphe de μ), intérieure au domaine G pour tout t , si $|\mu|$ est assez petit. L'A. discute alors les conditions moyennant lesquelles (I) possède une solution périodique — dont il forme d'ailleurs le développement en certaines séries — pour tout μ intérieur à un „segment“ (notion introduite par l'A. dans le travail précité) et différent de ε (pour tout t) de la solution correspondante du système simplifié.

Julien Kravtchenko.

Volk, I. M.: Über die Stabilität periodischer Bewegungen im Falle, daß die Gleichungen und ihre Lösungen nur näherungsweise bekannt sind. Priklad. Mat. Mech., Moskva 12, 647—650 (1948) [Russisch].

Etant donné le système différentiel: (I) $dx_v/dt = Z_v(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu, t)$, $v = 1, 2, \dots, n$, dont les seconds membres sont analytiques en x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) dans un domaine borné G , méromorphes en μ pour $|\mu| \leq \rho$, périodiques en t (la période T étant la même pour tous les Z_v et indépendante de μ), l'A. appelle „système simplifié“ de (I) le système: (II) $dx_v/dt = \mu^{k_v} X_v(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$, où les seconds membres sont les parties principales des développements des Z_v . Il existe

des critères assurant l'existence simultanée des solutions périodiques voisines de (I) et de (II) [cf. le travail de l'A., C. r. (Doklady) Acad. Sci. URSS, n. S. 51, 437—440 (1946)]. Ces conditions étant supposées remplies, l'A. discute de la stabilité (au sens de Liapounov) de la solution périodique de (I) supposant seulement connue la solution périodique voisine de (II). *Julien Kravtchenko.*

Erugin, N. I.: Verallgemeinerung eines Satzes von Ljapunov. Priklad. Mat. Mech., Moskva 12, 633—638 (1948) [Russisch].

Lorsque $p(t)$ est une fonction périodique non négative, Liapounov a obtenu une inégalité moyennant laquelle l'intégrale générale de: $d^2x/dt^2 + p(t)x = 0$ est bornée et non-amortie. L'A. indique une démonstration nouvelle de ce critère, ce qui le conduit à une généralisation de celui-ci. *Julien Kravtchenko.*

Četaev, N. G.: Über einige Fragen der Stabilität und Instabilität für irreguläre Systeme. Priklad. Mat. Mech., Moskva 12, 639—642 (1948) [Russisch].

Aux paragraphes 12 et 13 de son grand ouvrage „Problème général de la stabilité des mouvements“ (Charkov 1892 russ., Ann. Fac. Sci. Toulouse, II. S. 9, 203—474 franç., Ann. math. Studies Nr. 17, Princeton 1947). Liapounov avait énoncé comme probable (mais sans réussir à justifier cette hypothèse) un critère de stabilité en première approximation, valable pour les systèmes irréguliers. L'A. parvient, par un raisonnement direct, à donner une démonstration de cette importante proposition et à la compléter par un critère d'instabilité. *Julien Kravtchenko.*

Makarov, I. P.: Neue Stabilitätskriterien nach Ljapunov im Falle einer unendlichen Dreiecksmatrix. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 62, 289—292 (1948) [Russisch].

Soit le système: $(1) \frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}(t) x_k \quad (i = 1, 2, \dots, \infty)$ dont les coefficients sont des fonctions continues de t , assujetties à certaines conditions. L'A. donne alors les critères de stabilité et d'instabilité (au sens généralisant celui de Liapounov) de la solution $x_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, \infty)$ de (1). *Julien Kravtchenko.*

Persidskij, K. P.: Gleichmäßige Stabilität in erster Näherung. Priklad. Mat. Mech., Moskva 13, 229—240 (1949) [Russisch].

Let x denote any (infinite) sequence of numbers x_1, x_2, \dots , $\|x\| = \sup |x_i|$ and consider the system $(1.1) \dot{x} = \omega(t, x)$, where ω is defined and continuous in t in the region H defined by $t \geq 0$, $\|x\| \leq R$ and satisfies $\|\omega(t, x') - \omega(t, x'')\| \leq A(t) \cdot \|x' - x''\|$, where $A(t)$ is continuous; $\omega(t, 0) = 0$. Then through each point in H passes one and only one solution of (1.1); the usual definitions of stability, uniform stability and asymptotic stability apply to this case. Assume that $\omega = L(t)x + L_1(t, x)$, where $L(t)$ denotes a bounded linear transformation, continuous in t , and $\|L_1(t, x)\| = o(\|x\|)$; then the solution $x = 0$ of (1.1) is said to be (uniformly) stable in the first approximation if it is (uniformly) stable for any choice of $L_1(t, x)$, $L(t)$ being kept fixed. Two theorems are proved; the first one states: In order that $x = 0$ be uniformly stable in the first approximation it is necessary and sufficient that the solution of the linear system $\dot{x} = L(t)x$ passing through (t^0, x^0) satisfy: $\|x(t)\| \leq \|x^0\| \cdot D \exp[-\alpha(t - t^0)]$, where D, α are two positive constants independent of x^0, t^0 ; in this case the solution is asymptotically stable. If ω does not depend on t this is a necessary and sufficient condition for stability in the first approximation. *José Massera.*

Wolfowitz, J.: Remarks on the notion of recurrence. Bull. Amer. math. Soc. 55, 394—395 (1949).

Einfacher Beweis des Poincaréschen Wiederkehrsatzes.

Willi Rinow.

Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Pini, Bruno: Sui sistemi di equazioni lineari del primo ordine ai differenziali totali. Boll. Un. mat. Ital., III. S. 5, 255—264 (1950).

Das Gleichungssystem wird geschrieben $dy = A y du + B y dv$, wobei $A = \|a_{hk}\|$ und $B = \|b_{hk}\|$ vorgegebene konstante Quadratmatrizen n -ter Ordnung mit $A B = B A$ und $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ einen unbekannten Funktionenvektor der Veränderlichen u, v bezeichnen. Die früheren Ergebnisse von Saltykow und Poincaré über solche Systeme (dies. Zbl. 29, 128, 30, 254) waren der Einschränkung unterworfen, daß die Eigenwerte der Matrizen A, B , d. h. die Wurzeln der Gleichungen n -ter Ordnung $\det. (A - \rho E) = 0$, $\det. (B - \rho E) = 0$ (oder mindestens einer der beiden Matrizen) einfach sein sollten. Nachdem Verf. gezeigt hat, wie in diesem Falle in ganz elementarer Weise fast unmittelbar der Ausdruck des allgemeinen Integrals gegeben werden kann, nimmt er den allgemeinen Fall in Angriff, daß beide Matrizen auch mehrfache Eigenwerte haben können. Er gelangt zu dem Ziel, das allgemeine Integral mittels der Betrachtung der Elementarteiler der Matrizen A, B anzugeben. Es wird u. a. bewiesen: notwendig und hinreichend dafür, daß alle Lösungen des Systems von reinem Exponentialtypus sind, ist, daß alle Elementarteiler der beiden Matrizen A, B linear sind. *G. Cimmino.*

Donder, Th. De: Simplification de la méthode d'intégration de Jacques Hadamard. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. 36, 960—961 (1950).

Moisil, Gr. C.: Über eine invariante Definition der Charakteristiken eines Systems von partiellen Differentialgleichungen. Acad. Republ. popul. Române, Bul. Sti. A 2, 683—685, russische und französ. Zusammenfassgn. 685—686, 686 (1950) Rumänisch].

Bouligand, Georges: Sur certaines équations $f(x, y, z, p, q) = 0$. Gaz. Mat., Lisboa 11, Nr. 43, 1—6 (1950).

Verf. behandelt Fragestellungen, die sich aus dem Zusammenhang von dreifach orthogonalen Flächensystemen mit partiellen Differentialgleichungen (Dgl.) $f(x, y, z, p, q) = 0$ ergeben, ein Zusammenhang, der von G. Darboux (Leçons sur les systèmes triples orthogonaux et les coordonnées curvilignes, Paris 1910) genauer untersucht worden ist. Die gegenüber Ähnlichkeitstransformationen invariante orthogonale Flächenschar $\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{z^2}{c^2 + \lambda} = 1$, um nur das bekannteste Beispiel anzuführen, gibt Anlaß zu einer Dgl., die durch Elimination von λ aus $\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{p z}{c^2 + \lambda} = 0$ und $\frac{y^2}{b^2 + \lambda} + \frac{q z}{c^2 + \lambda} = 0$ entsteht und von der Form ist: $(b^2 - c^2) q (x + p z) - (a^2 - c^2) p (y + q z) = 0$. Sie subsummiert sich unter die allgemeine Form $p q + A(x, y, z) q + B(x, y, z) p = 0$ und führt Verf. dazu, die Flächenscharen zu betrachten, die durch Integrale von Gleichungen dieses Typs erzeugt werden. Die Fragestellung wird ausgedehnt auf den allgemeinen Fall, daß die „kanonische Form der Dgl.“ $A_1(p^2 - 1) + B_1(q^2 - 1) + 2 C p q + 2 A q + 2 B p = 0$ lautet. Probleme werden aufgezeigt, ohne im einzelnen weiter verfolgt zu werden. *Erwin Hardtwig.*

Landis, E. M.: Ein Beispiel einer nicht eindeutigen Lösung des Cauchyschen Problems für ein System der Form $\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_j A_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} + \sum_j B_{ij} u_j + f_i \quad (i, j = 1, 2)$. Mat. Sbornik, n. S. 27 (69), 319—323 (1950) [Russisch].

The author constructs an example of a system of the form $u_t = a_1 u_x + b_1 v_x + c_1 u + d_1 v, \quad v_t = a_2 u_x + b_2 v_x + c_2 u + d_2 v$, with coefficients defined and differentiable in the square $(0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1)$, with solutions $u(t, x), v(t, x)$ which are continuously differentiable in this square, which vanish identically for $t = 0$ but which differ from zero if $t \neq 0$. Another such example had already been given by A. D. Myškis (this Zbl. 29, 360).

Frederik V. Atkinson.

Butlewski, Zygmunt: Sur les intégrales oscillantes d'une équation différentielle aux dérivées partielles du second ordre. Ann. Soc. Polonaise Math. 23, 43—68 (1950).

Seien die Lösungen $w(t)$ von $(pw')' + qw = 0$ ($t_0 \leq t < \infty$) oszillatorisch, $t_1 < t_2 < t_3 < \dots$ die Nullstellen von $w(t)$, τ_n ($t_n < \tau_n < t_{n+1}$) die Nullstellen von $w'(t)$. Dann gilt: Ist $p \cdot q > 0$, $(pq)' < 0$ (> 0) für $t \geq t_0$, so nehmen die Folgen $\{\sqrt{p(\tau_n)q(\tau_n)}|w(\tau_n)|\}$, $\{|p(t_n)w'(t_n)|\}$ ab (zu), $\{|w(\tau_n)|\}$ zu (ab). Ist $p \cdot q = \text{const} > 0$, so sind die Folgen konstant. Diese vom Verf. schon in einer früheren Note [Mathematica, Cluj 12, 37—38 (1936)] „in weniger vollständiger Form“ angegebenen Resultate werden hier auf die Lösungen $z(x, y) = u(x) \cdot v(y)$ der partiellen Differentialgleichung

$$A(x) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + B(x) \frac{\partial z}{\partial x} + C(x)z = A_1(y) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + B_1(y) \frac{\partial z}{\partial y} + C_1(y)z$$

in sehr naheliegender Weise übertragen.

Friedrich Wilhelm Schäfke.

Krzyżański, M.: Sur l'équation aux dérivées partielles de la diffusion. Ann. Soc. Polonaise Math. 23, 95—111 (1950).

Verf. betrachtet die parabolische Differentialgleichung

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} - b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} - c(x, y)u = 0$$

mit stetigen Koeffizienten und $b(x, y) > \beta > 0$ in einem Streifen Γ :

$$-\infty < x < +\infty, 0 \leq y \leq h.$$

Auf $y = 0$ sind außerhalb einer abgeschlossenen Menge E stetige Randwerte $\varphi(x)$ vorgeschrieben. — Verf. zeigt, daß es keine zwei verschiedenen „regulären“ Lösungen $u_1(x, y)$ und $u_2(x, y)$ von (1) geben kann, die diese Randbedingung erfüllen, falls noch verlangt wird, daß $|u_2(x, y) - u_1(x, y)|/K(x, y) \rightarrow 0$ geht, wenn (x, y) gegen Punkte von E oder ins Unendliche strebt. Hierbei ist $K(x, y)$ ein passend zu bestimmender Dämpfungsdivisor, der im Falle, daß E beschränkt und vom Maß Null ist und (1) sich auf die Form $\partial^2 w / \partial x^2 - \partial w / \partial y - c_1(x, y)w = 0$ — mit $c_1(x, y) > -(Ax^2 + B)$, $A > 0$, $B > 0$, im Innern von Γ — bringen läßt, auch tatsächlich angegeben wird. Mit Hilfe von $K(x, y)$ werden auch hinreichende Bedingungen für die Konvergenz einer Folge von Lösungen $u_n(x, y)$ mit den für alle x stetigen Randwerten $\varphi_n(x)$ gegen eine Lösung $u(x, y)$ mit den Randwerten $\varphi(x)$ aufgestellt.

M. J. de Schwarz.

Capra, Vincenzo: Sopra una particolare serie che si presenta in un problema di scienza delle costruzioni. Atti Accad. Sci. Torino, Cl. I 84, 181—188 (1950).

Verf. betrachtet die Differentialgleichung $\frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial t} + \frac{P}{EI} \frac{du}{dt} + \frac{1}{I} \left(\frac{Q}{2} z + Pu \right) = 0$ auf die man bei der Untersuchung der Unstabilität des Gleichgewichts eines Stabes im elastisch-viskosen Fall geführt wird. Die Lösung der auf die Form

$$\frac{\partial^3 v}{\partial z^2 \partial \tau} + K^2 \frac{\partial v}{\partial \tau} + K^2 E v = 0$$

gebrachten Differentialgleichung wird als Reihe

$$v = b_0(z) + b_1(z)\tau + b_2(z)\tau^2 + \dots + b_n(z)\tau^n + \dots$$

angesetzt und unter Annahme gewisser Randbedingungen die Konvergenz derselben für beliebiges τ bewiesen. Ein Verfahren zur Berechnung der $b_n(z)$ wird angegeben und das Ergebnis für die ersten fünf $b_n(z)$ aufgeführt.

J. M. de Schwarz.

Peiser, Alfred M.: Uniform approximations to a class of Bessel functions. Proc. Amer. math. Soc. 1, 650—661 (1950).

Per l'equazione alle derivate parziali $t_{xy} + t_x + t_y = 0$, con valori prescritti alla $t(x, y)$ per $x = 0$ e per $y = 0$, viene indicata come formula risolutiva la

$$t(x, y) = t(x, 0)e^{-y} + \int_0^x t(u, 0)K_1(x-u, y)du + \int_0^y [t(0, v) + t_v(0, v)]K_0(y-v, x)dv$$

con $K_n(x, y) = (y/x)^{n/2} e^{-x-y} I_n(2\sqrt{xy})$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), dove I_n è la funzione

di Bessel di ordine n e argomento immaginario. Posto poi $\Phi(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$, L'A. prova che le differenze $\sqrt{2}y + 1 K_0(x, y) - \Phi((x - y - 1)/\sqrt{2}y + 1)$, $\sqrt{2}y K_1(x, y) - \Phi((x - y)/\sqrt{2}y)$ tendono a zero per $y \rightarrow +\infty$, determinando due funzioni di sola y convergenti a zero per $y \rightarrow +\infty$, che maggiorano i valori assoluti delle differenze stesse per $y \geq 10$. L'A. accenna inoltre alla possibilità di sviluppi asintotici per le $K_n(x, y)$, anche per $n > 2$, mediante le successive derivate della $\Phi(x)$. G. Cimmino.

Conti, Roberto: Sul problema di Cauchy per le equazioni di tipo misto $y^k z_{xx} - x^k z_{yy} = 0$. II. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. S. 4, 1—25 (1950).

Im ersten Teil dieser Arbeit (dies. Zbl. 35, 65) wurde Existenz und Eindeutigkeit einer die Cauchy-Bedingungen $z(x, 0) = \vartheta(x)$, $z_y(x, 0) = \zeta(x)$ befriedigenden Lösung $z(x, y)$, $0 \leq y \leq x$, der im Titel genannten Gleichung unter folgenden Voraussetzungen bewiesen: $\vartheta(x)$ für $x \geq 0$, $\zeta(x)$ für $x > 0$ beschränkt und stetig, beide für $x > 0$ zweimal stetig differenzierbar. Es wird nun gezeigt, daß z_x, z_y in jedem Randpunkt des Gebietes $0 < y < x$ gegen endliche Limeswerte streben, wenn $\vartheta'(x)$, $\vartheta''(x)$, $\zeta'(x)$ auch für $x = 0$ existieren und endlich sind; dasselbe gilt außerdem für z_{xx}, z_{yy}, z_{xy} , falls $\vartheta'''(x)$, $\zeta''(x)$ für $x \rightarrow 0$ unendlich klein der Ordnung k bzw. $k - 1$ sind. Verf. studiert dann die Randwertaufgabe, eine Lösung $z(x, y)$ der fraglichen partiellen Differentialgleichung bei geradem k im Gebiet $-x < y < x$, $x > 0$ mit vorgeschriebenen Randwerten $z(x, x) = f(x)$, $z(x, -x) = g(x)$ zu bestimmen; der dazu angegebene Existenzbeweis setzt voraus, $f(x)$ und $g(x)$ seien stetig für $x \geq 0$, einander gleich für $x = 0$, dreimal stetig differenzierbar und $f'(x) - g'(x)$ beschränkt für $x > 0$. Es wird endlich wieder das Cauchy-Problem betrachtet, wobei die Werte $\vartheta(x)$, $\zeta(x)$ für $z(x, 0)$, $z_y(x, 0)$ auf der ganzen x -Achse gegeben sind; bei geradem k wird dann die Existenz einer Lösung $z(x, y)$ in der ganzen xy -Ebene bewiesen, falls $\vartheta(x)$, $\zeta(x)$ für alle x dreimal stetig differenzierbar sind mit $\vartheta''(0) = \zeta''(0)$, $\vartheta'''(x)$, $\zeta'''(x)$ für $x \rightarrow 0$ unendlich klein von der Ordnung $k - 1$ bzw. $k - 2$. Kurzer Hinweis auf noch andere derartige Probleme mit verschiedenen Arten von Nebenbedingungen. G. Cimmino.

Gårding, Lars: Errata: The solution of Chauchy's problem for two totally hyperbolic linear differential equations by means of Riesz integrals. [These Annals, 48, 785—826 (1947)]. Ann. Math., Princeton, II. S. 52, 506—507 (1950).

Contiene un elenco di correzioni a un precedente lavoro dell'Autore, dallo stesso titolo (questo Zbl. 29, 216). Luigi Amerio.

Četaev, D. N.: Über eine Randwertaufgabe für die Wellengleichung. Uspechi mat. Nauk 5, Nr. 6 (40), 136—137 (1950) [Russisch].

Report of a lecture. The problem of the radiation of sound waves from an oscillating piston leads the author to study the expression

$$\varphi = \frac{v}{2\pi} \iint_S \frac{e^{-ikr}}{r} dS$$

where S is a portion of the plane $z = 0$, bounded by the contour C . He states the result

$$\varphi = -\frac{\alpha}{2\pi} \frac{vi}{k} e^{-ikz} + \frac{vi}{2\pi k} \oint_C e^{-ikr(s)} \frac{1}{p(s)} \sqrt{1 - \left(\frac{dp}{ds}\right)^2} ds,$$

where the value of α depends on whether the projection $p(x, y, 0)$ of the point $P(x, y, z)$ on the plane $z = 0$ lies inside, outside or on C . He then expands the contour integral by the method of stationary phase. Finally there are formulae for the radiation resistance of the piston, particularly in the case when it is square. The author has given a slightly fuller account of his work elsewhere [Doklady Akad. Nauk n. S. 76, 813—816 (1951)], the reviewer comments. Frederik V. Atkinson.

Seth, B. R.: Some solutions of the wave equation. Proc. Indian Acad. Sci. A 32, 421—423 (1950).

L'A. donne la solution explicite de l'équation $\Delta \Phi + p^2 \Phi = 0$, sous la condition au bord $\Phi = k$ ($= \text{const.}$) pour divers domaines. Partant de la solution élémentaire

$$\Phi = \frac{\sin}{\cos}(px \cos \theta) \frac{\sin}{\cos}(py \sin \theta),$$

il obtient la solution du problème aux limites pour: (a) tout rectangle, (b) tout triangle isocèle rectangle, (c) tout triangle équilatéral, (d) certains parallélogrammes, (e) certains pentagones. — Les solutions (a) et (b) comportent des développements en séries de Fourier, les autres s'expriment en termes finis par des fonctions trigonométriques. Ch. Blanc.

Brazma, N. A.: Lösung der Grundaufgabe der Fortpflanzung elektromagnetischer Prozesse in einem System mit mehreren Leitern. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 69, 313—316 (1949) [Russisch].

Die Aufgabe der Fortpflanzung elektromagnetischer Schwingungen in einem System von n Leitern führt auf ein System von linearen partiellen Differentialgleichungen, den Telegraphengleichungen, das unter Verwendung der Matrizen-schreibweise die folgende Gestalt besitzt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \mathfrak{U}_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \mathfrak{U}_2 \frac{\partial u}{\partial t} + \mathfrak{U}_3 u.$$

u ist ein n -dimensionaler Vektor, dessen Komponenten die Spannungen auf den einzelnen Leitern sind. $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_3$ sind gewisse Matrizen, die durch die Kapazitäten, Widerstände, Ableitungen und Induktivitäten des Systems bestimmt sind. Verf. behandelt die folgende Randwertaufgabe: $u(0, t) = u_0$ (ein konstanter Vektor),

$u(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = 0$. Durch den naheliegenden Ansatz $u = v(x, t) + \tilde{f}(x)$ mit $\tilde{f}'' = \mathfrak{U}_3 \tilde{f}, \tilde{f}(0) = u_0, \tilde{f}(l) = 0$, wird diese Aufgabe auf eine vom Verf. früher behandelte [Izvestija Akad. Nauk Latvijas SSR 5, 125 (1949)] zurückgeführt und durch einen Fourieransatz gelöst. Willi Rinow.

Pleijel, Åke: On the eigenvalues and eigenfunctions of elastic plates. Commun. pure appl. Math., New York 3, 1—10 (1950).

Ausgehend von der Theorie der dünnen elastischen Platte konstanter Dicke, deren Durchbiegung im Falle der Eigenschwingungen der Gleichung $\Delta \Delta u + \kappa \Delta u = 0$ genügt ($\Delta = \text{Laplacescher Operator, } \kappa \text{ reell}$) wird das asymptotische Verhalten der Eigenwerte und Eigenfunktionen des Problems untersucht. Die erforderlichen Abschätzungen der Greenschen Funktion werden mit den Methoden der Variationsrechnung durchgeführt. Die asymptotischen Eigenschaften der Eigenwerte und Eigenfunktionen sind durch Anwendung des Tauberschen Theorems erhalten [G. H. Hardy und J. E. Littlewood, Proc. London math. Soc., II. S. 30, 23—37 (1930)]. Rolf Gran Olsson.

Weinstein, Alexander: Separation theorems for the eigenvalues of partial differential equations. Reissner Annivers. Vol., Contr. appl. Mech., Ann Arbor Mich., 404—414 (1949).

Sei S ein Bereich der (x, y) -Ebene, C seine Randkurve, s die Bogenlänge auf C , f eine gegebene Funktion auf C mit $\int_C f(s) ds = 0$. (Auf eine Präzisierung der Voraussetzungen hat Verf. verzichtet.) Sind λ_ν ($\nu = 1, 2, 3, \dots$) die Eigenwerte des Problems $\Delta v + \lambda v = 0$ in S , $\int_C f v ds = 0, \partial v / \partial n = a f(s)$ (a eine unbekannte Konstante) auf C , ω_ν ($\nu = 1, 2, 3, \dots$) die Eigenwerte von $\Delta u + \omega u = 0$ in S , $\partial u / \partial n = 0$ auf C , so wird bewiesen: $\omega_1 \leq \lambda_1 \leq \omega_2 \leq \lambda_2 \leq \omega_3 \leq \dots$. Die Herleitung benutzt Variationsansätze und basiert auf Methoden, die vom Verf. in

üheren Arbeiten entwickelt wurden. (Vgl. insbes. A. Weinstein, *Mém. Sci. math.*, Paris no. 88, 1937; dies. Zbl. 18, 216).

Friedrich Wilhelm Schäfke.

● **Künzi, Hans Paul:** Der Fatou'sche Satz für harmonische und subharmonische Funktionen in n -dimensionalen Kugeln. (Diss.) Olten (Schweiz): Verlag Otto Walter AG. 1949. 27 S.

Es sei u harmonisch oder subharmonisch im Inneren der n -dimensionalen Einheitskugel. Wenn die über konzentrische Kugelflächen mit Radien $\varrho < 1$ genommenen Flächenintegrale von $|u|$ für $\varrho \rightarrow 1$ gleichmäßig beschränkt sind, so hat fast überall auf der Einheitskugelfläche radiale Grenzwerte, d. h. ausgenommen höchstens eine $(n-1)$ -dimensionale Nullmenge. Im harmonischen Fall erfolgt der Beweis mit Hilfe des Poissonschen Integrals unter Heranziehung von Sätzen von Radon und Lebesgue über Massenbelegungen. Im subharmonischen Fall bedient sich Verf. des Darstellungssatzes von F. Riesz und gewisser Abschätzungen der Greenschen Funktion.

Gunnar af Hällström.

Kjellberg, Bo: On the growth of minimal positive harmonic functions in a plane region. *Ark. Mat.*, Stockholm 1, Nr. 25, 347—351 (1950).

G sei ein Gebiet mit einem unendlich fernen Randpunkt, U die Klasse der in G positiven und in jedem endlichen Randpunkt verschwindenden harmonischen Funktionen, die in einem innern Punkt etwa zu 1 normiert sind. Die Punkte $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, für welche mit u_1, u_2, \dots, u_n auch $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_n u_n$ zur Klasse U gehört, bilden in der Ebene $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = 1$ ein konvexes Polyeder. Seine Ecken entsprechen minimale positive harmonische Funktionen im Sinne von R. S. Martin [*Trans. Amer. math. Soc.* 49, 137—172 (1941); dies. Zbl. 25, 333]. Über die Klasse V von solchen in G minimalen positiven harmonischen Funktionen v , die in jedem endlichen Randpunkt verschwinden und von denen keine zwei einander proportional sind, beweist Verf. den folgenden bemerkenswerten Satz: Ist ihre Anzahl mindestens zwei, so ist $\sum_{v \in V} \frac{1}{\varrho} \leq 2$, wenn $\varrho = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r)}{\log r}$, $M(r) = \sup_{|z|=r} v(z)$, die Ordnung von v bezeichnet.

Albert Pfluger.

Karabegov, V.-K. I.: Über die Stabilität des Dirichletschen Problems für die Gleichung $\Delta u + \lambda u = 0$. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. S. 75, 491—494 (1950) [Russisch].

Let G_0 be a region of 3-space, f a function defined on its boundary, such that the corresponding Dirichlet's problem for the equation $\Delta u + \lambda u = 0$ has a unique solution. Let $\{G_n\}$ be a sequence of „normal“ regions which approximate to G_0 from the outside, and let f be continued on to the boundaries of the G_n . The author constructs a region G_0 such that the limit, as $n \rightarrow \infty$, of the sequence of solutions of Dirichlet's problem for G_n and f and a particular value of λ is not unique, but depends on the manner in which the function f is continued on the to the boundaries of the G_n . The work appears to be inspired by that of M. V. Keldyš [*Uspechi mat. Nauk* 8, 171—321 (1941)].

Frederik V. Atkinson.

Lesky, Peter: Anwendung der Methode Picones auf ein Wärmeleitungsproblem. *Mon. Math.*, Wien 54, 241—254 (1950).

Verf. behandelt die Differentialgleichung $\Delta u = 0$ im Bereich $0 \leq x \leq l$, $0 \leq y \leq l$ mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\alpha_1}{\lambda} (u - \theta_1) & (x=0), & \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\alpha_2}{\lambda} (u - \theta_2) & (y=0) \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{\alpha_3}{\lambda} (u - \theta_3) & (x=l), & \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\alpha_4}{\lambda} (u - \theta_4) & (y=l) \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} \alpha_i, \theta_i, \lambda \\ \text{const.} \end{array} \right)$$

nebeneinander mit klassischen Ansätzen, andererseits mit der Methode von M. Picone (vgl. z. B. Picone und Fichera, *Mh. Math.*, Wien 54, 188—209 (1950)). In einem speziellen numerischen Beispiel stimmen die auf den beiden Wegen gewonnenen Resultate gut überein.

M. J. de Schwarz.

Variationsrechnung:

Miehlin, S. G.: Variationsmethoden für die Lösung von Problemen der mathematischen Physik. Uspechi mat. Nauk 5, Nr. 6 (40), 3—51 (1950) [Russisch].

L'A. se propose de passer en revue les méthodes variationnelles modernes de résolution des problèmes de physique mathématique. — En voici le principe commun. Soient: M un ensemble dense de l'espace complexe H de Hilbert; u l'élément générateur de H ; A un opérateur linéaire défini positif, opérant sur $u \in M$, tel que $Au \in H$; H_0 l'espace de Hilbert formé à partir de u au moyen de la métrique $(u, v) = (Au, v)$ ($u, v \in M$) et en complétant, au besoin, l'ensemble obtenu (à noter que $H_0 \in H$). L'A. rappelle que la solution u_0 de $Au = f$ ($f \in H$) rend minimum $F(u) = (Au, v) - (u, f) - (f, u)$ sur H_0 (la solution pouvant ne pas appartenir à M); des artifices convenables permettent, d'ailleurs, de regarder A comme conjugué par rapport à lui-même. On a ainsi réduit un problème aux limites à un problème variationnel admettant une solution. L'A. discute aussi les cas singuliers échappant à l'analyse précédente. — L'A. passe ensuite en revue les différents procédés employés pour résoudre effectivement le problème variationnel ci-dessus. 1. La méthode modernisée de Ritz repose sur les résultats suivants: si H_0 est séparable (ce qui est vrai si H l'est), la solution u_0 se développe en série de fonctions ψ_n orthonormées formant dans H_0 une suite fermée et complète. De ces propriétés, résulte la convergence du processus d'approximations de Ritz. L'A. mentionne aussi de nouveaux procédés de construction de suites minimisantes (par exemple: L. Kantorovič). Le procédé de Ritz a été étendu par Galerkin au cas où A n'est plus un opérateur défini positif; mais la question de la convergence n'est pas alors tranchée dans toute sa généralité, bien qu'il existe des critères suffisants, dus à l'A., Keldyš, Petrov, Pol'skij. A noter une généralisation de la méthode de Galerkin, due à Petrov, dont Pol'skij s'est servi dans l'étude d'un problème de détermination des fonctions propres. — 2. La méthode des projections orthogonales (R. Courant, H. Weyl) fait intervenir les problèmes variationnels d'un autre type, que nous illustrerons sur l'exemple du problème de Dirichlet ordinaire. Soient: Ω le domaine de définition de u ; S sa frontière; \bar{u} la donnée frontière. Admettons l'existence d'au moins une fonction ψ telle que $\psi = \bar{u}$ sur S et que $\iint_{\Omega} (\text{grad } \psi)^2 d\Omega$ ait un sens. Prenons alors $M = L_2(\Omega)$; soit N le sous-

espace de H comprenant les fonctions continues et différentiables dans $\bar{\Omega} = \Omega + S$; $\psi \in N$. L'ensemble M sera le sous-ensemble des fonctions de N nulles sur S . On montre que tout revient alors à chercher $u_0 \in M$ rendant minimum $\iint_{\Omega} [\text{grad}^2(\psi - u)] d\Omega$. L'A. donne des critères

d'existence des solutions. — 3. Pour le problème des valeurs propres et des fonctions propres l'A. expose les résultats classiques de Courant: réduction au problème variationnel, existence d'une suite infinie de fonctions et de valeurs propres, développement en série de ces fonctions propres, etc. — Les processus généraux qui précèdent s'appliquent aux équations non homogènes en gros, chaque fois que A , opérant sur $L_2(\Omega) = M$, est défini positif, et que tout ensemble borné de H_0 est compact dans $L_2(\Omega)$. Tout revient, dès lors, à vérifier les deux propriétés précitées dans chaque cas concret. C'est ce que fait l'A. pour: 1. le problème de Dirichlet pour relativement à une équation du type elliptique avec second membre f (à noter les résultats de Višik, réduisant les hypothèses de régularité imposées à f ; 2. les équations de l'élasticité signalant la démonstration simplifiée de l'inégalité fondamentale de Korn-Friedrichs, due à Ejdus). — On doit à Sobolev un procédé d'„immersion“ qui permet de réduire à des problèmes variationnels admettant une solution certains problèmes aux limites comportant des conditions frontières très compliquées. Voici le principe de la méthode. On utilise l'opération I qui transforme l'élément d'un espace en lui-même, aussi envisagé comme l'élément d'un autre espace. Mais le domaine Ω , où les solutions sont définies, est assujéti à vérifier les hypothèses de régularité supplémentaires. — La méthode de Sobolev permet, en particulier, de réduire à un problème variationnel régulier le problème de Neumann et de traiter le problème de Dirichlet pour l'équation polyharmonique dans le cas d'un domaine à frontière dégénérée. — Il est important de savoir évaluer l'erreur commise en remplaçant la solution exacte u d'un problème aux limites par la n ème approximation u_n , obtenue par un procédé variationnel. L'A. rappelle les résultats classiques de Krylov et Bogoljubov, valables dans le cas de la méthode de Ritz appliquée à un problème plan de Dirichlet à frontière assez régulière; ces conclusions ont été améliorées par Kantorovič, qui trouve: $|u - u_n| \leq O(n^{-p} \log n)$. D'autres procédés, plus pratiques sous les aspects ci-dessus, ont été analysés dans ce paragraphe. — Lorsque l'on a réduit à un problème variationnel, un problème aux limites, posé pour une équation aux dérivées partielles, il n'est pas certain a priori, que la solution du premier — à supposer qu'elle existe — soit une solution du second. Ce problème d'équivalence a été étudié par R. Courant dans des recherches classiques, dont les conclusions ont été étendues par Sobolev et Višik aux cas d'équations polyharmoniques. On trouvera dans le texte analysé, un résumé succinct de leurs conclusions. — Enfin, l'A. rattache aux méthodes variationnelles, la méthode dite des nombres carrés.

Julien Kravtchenko.

Cesari, Lamberto: Problemi di calcolo delle variazioni e questioni connesse.

Riv. Mat. Univ. Parma 1, 293—304 (1950).

Texte d'une conférence faite au 3^e Congrès de l'„Unione Matematica Italiana“
Pise, 1948. Vue d'ensemble sur les résultats obtenus, au cours de ces dernières
années, dans l'étude des méthodes directes du calcul des variations. L'A. considère
spécialement l'influence de L. Tonelli sur le développement des recherches consacrées
à l'étude de l'aire et de la représentation des surfaces. *Th. Lepage.*

Mancill, Julian D.: Identically non-regular problems in the calculus of varia-
tions. Univ. nac. Tucumán, Fac. Ci. exact. Tecnol., Rev., Ser. A 7, 131—139 (1950).

Verf. beschäftigt sich mit dem Variationsintegral: $\int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y') dx = \text{Min}$,
wenn der sogenannte identisch nicht reguläre Fall vorliegt: $f_{yy} \geq 0$ im zugrunde
gelegten Bereich R der x, y -Ebene, $f(x, y, y') = P(x, y) + Q(x, y) y'$. Es werden
mit elementaren Hilfsmitteln notwendige und hinreichende Bedingungen für das
Eintreten des Minimums bei den Problemen mit festen und variablen Endpunkten
abgeleitet und damit nach Ansicht des Verf. eine Lücke geschlossen. *Beckert.*

Tonelli, Leonida: Nuove ricerche su una speciale classe di problemi di calcolo
delle variazioni. Riv. Mat. Univ. Parma 1, 125—156 (1950).

In dieser letzten Arbeit des großen Meisters der Variationsrechnung werden
die Resultate einer früheren Untersuchung [Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis.
mat., II. S. 10, 167—189 (1941); dies. Zbl. 26, 229] verallgemeinert. Es handelt sich
um die Konstruktion einer in R : $X_0 \leq x \leq X_1$; $Y_0 \leq y \leq Y_1$ verlaufenden Ex-
tremalen zu dem positiv regulären Variationsproblem:

$$J[y(x)] = \int_{X_0}^{X_1} \frac{f(y(x), y'(x))}{\varphi[y(x)]} dx \rightarrow \text{Min}$$

in der Klasse der absolut stetigen Funktionen bei festgehaltenem Anfangspunkt
(X_0, Y_0), wobei als zweite Bedingung das Bestehen einer Ungleichung für die erste
Ableitung längs der Kurve hinzutritt. Dabei wird obendrein zugelassen, daß für
die zweimal stetig differenzierbare Funktion $\varphi(y)$ gilt: $\varphi(Y_1) = 0$, $\varphi(y) > 0$ für
 $Y_0 \leq y < Y_1$. Unter den Voraussetzungen $f_{y'y'} > 0$, $f(y, y') - y' f_{y'}(y, y') \rightarrow 0$ für
 $y' \rightarrow +\infty$, $f(y, y') \geq 0$ für $y' \leq 0$, $f(y, y') \geq \gamma y'$ mit $\gamma > 0$ für $y' > 0$ und
 $Y \leq y < Y_1$ wird bewiesen: In der Klasse der in $X_0 \leq x \leq X_1$ absolutstetigen
Funktionen $y(x)$ mit $y(X_0) = Y_0$, $Y_0 < Y_1$, $Y_0 \leq y(x) \leq Y_1$ und $y'(x) \geq \psi[y(x)]$
fast überall [$\psi(y)$ stetig und $\psi(Y_1) < 0$] wird das absolute Minimum von $J[y(x)]$
angenommen. Die Extremalen sind stetig differenzierbar. Das zweite Hauptresultat
der Arbeit besteht in der Herleitung eines analogen Satzes, wenn der Aufpunkt
mit (X_0, Y_1) zusammenfällt, wobei noch zusätzliche Voraussetzungen für $f(y, y')$
hinzutreten. *Herbert Beckert.*

Čogošvili, G. S.: Über die Niveaulächen und die Bereiche kleinerer Werte.
Akad. Nauk Gruzinskij SSR, Trudy Tbilissk. mat. Inst. Razmadze 17, 203—243
und grusinische Zusammenfassg. 242 (1949) [Russisch].

In der Morseschen Theorie werden die Beziehungen zwischen den Anzahlen der
kritischen Punkte einer Funktion f und den Bettischen Zahlen der Mannigfaltigkeit,
auf der f definiert ist, unter allgemeinen Randbedingungen hergeleitet, indem zu-
nächst für spezielle Randbedingungen (Randbedingungen α) die Änderung der
Bettischen Zahlen der Bereiche $f \leq c$ beim Durchgang von c durch einen kriti-
schen Wert untersucht werden. Dagegen geschieht der Übergang auf die allgemeinen
Randbedingungen, ohne daß in diesem allgemeinen Fall die entsprechende Änderung
der Bettischen Zahlen bestimmt wird. Verf. hat in mehreren kurzen Noten seine
Ergebnisse über diese letzte Frage mitgeteilt (dies. Zbl. 21, 162; 22, 405; ferner
Soobščeniya Akad. Nauk Gruzinskij SSR 3, 995—999 (1942), 4, 853—859 (1943)).

Vorliegende Arbeit bringt im wesentlichen eine ausführliche Darstellung dieser Ergebnisse mit vollständigen Beweisen. Zunächst wird untersucht, wie sich die topologische Struktur der Bereiche $f \leq c$ und der Niveaulächen $f = c$ ändert, wenn c durch einen kritischen Wert der Funktion f bzw. der zugehörigen Randfunktion hindurchgeht. Wesentliches Hilfsmittel hierbei ist neben der von Morse benutzten Schar der Orthogonaltrajektorien der Niveaulächen noch eine besonders konstruierte Kurvenschar in der Nähe des Randes des Definitionsbereiches von f . Von diesen Ergebnissen ausgehend, werden dann die entsprechenden Änderungen der Bettischen Zahlen (mod 2) bestimmt. Hieraus ergeben sich insbesondere auch wieder die allgemeinen Morseschen Beziehungen. Ferner untersucht Verf. auch die Änderung der ganzzahligen Bettischen Gruppen der Bereiche $f \leq c$ beim Durchgang durch einen kritischen Wert von f sowie die entsprechende Änderung von Invarianten vom Typ der Kategorie.

Ewald Burger.

Morse, Marston and William Transue: A calculus for Fréchet variations. J. Indian math. Soc., Madras, n. S. 14, 65—117 (1950).

In vista di applicazioni alla teoria delle serie di Fourier gli AA. rilevano alcuni risultati relativi alla variazione di Fréchet per le funzioni di due variabili.

S. Cinquini.

Integralgleichungen. Integraltransformationen:

Germa, R. H.: Sur des équations intégrro-différentielles récurrentes. Bull. Soc. Sci. Liège 18, 250—258 (1949).

Il s'agit d'équations intégrro-différentielles récurrentes de la forme suivante:

$$\frac{dy_n}{dx} = F_n \left[x, y_n(x), y_{n+1}(x); \int_{x_0}^x f_{n,1} \{x, s; y_n(s), y_{n+1}(s)\} ds, \dots, \int_{x_0}^x f_{n,p} \{x, s; y_n(s), y_{n+1}(s)\} ds \right], \quad n = 1, 2, \dots$$

Si les fonctions F_n et $f_{n,i}$ ($i = 1, 2, \dots, p; n = 1, 2, \dots$) satisfont à des conditions de Lipschitz, il y a un seul système de solutions $Y_n(x)$ des équations données, fonctions continues de x définies dans un certain intervalle $(x_0, x_0 + h)$ et prenant en $x = x_0$ les valeurs y_n^0 . Le résultat est obtenu par la méthode des approximations successives.

Carlo Miranda.

Vajnberg, M. M.: Über die Existenz von Eigenfunktionen bei einem System nichtlinearer Integralgleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 61, 965—968 (1948) [Russisch].

Betrachtet wird das System nichtlinearer Integralgleichungen

$$\mu_i u_i(x) = \int_B K_i(x, y) g_i(u_1(y), u_2(y), \dots, u_n(y), y) dy, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

mit symmetrischen, positiven Kernen $K_i(x, y)$ der Klasse L_2 , d. h.

$$0 < \int_B \int_B K_i^2(x, y) dx dy < +\infty,$$

wobei für alle $x \in B$ gelten soll

$$g_i(u_1, \dots, u_n, x) = \frac{\partial}{\partial u_i} G(u_1, \dots, u_n, x) \quad \text{und} \quad g_i(0, \dots, 0, x) = G(0, \dots, 0, x) = 0.$$

B ist ein beschränktes Gebiet des ein- oder mehrdimensionalen euklidischen Raumes. Dieses System ist schon von Gremjačenskij behandelt worden (dies. Zbl. 30, 124) und wird naturgemäß als homogen bezeichnet. — Die Begriffe Eigenwert und Eigenlösung einer linearen Integralgleichung werden sinngemäß auf das System übertragen, und zwar bezüglich der Gesamtheit $\mu_i = \mu_i^{(0)}$ bzw. $u_i(x) = \psi_i(x)$, $i = 1, \dots, n$. Bewiesen wird durch Heranziehung des entsprechenden Systems linearer Integralgleichungen mit den gleichen Kernen, seinen Eigenwerten und Eigenlösungen, mittels einer die Variationsrechnung benutzenden Methode der Satz: Wenn die Funktionen $g_i(u_1, \dots, u_n, x)$ insgesamt einen in $L_{2,n}$ stetigen Operator darstellen, d. h. wenn aus der Konvergenz von $(u_{1m}(x), \dots, u_{nm}(x))$ nach $(u_1(x), \dots, u_n(x))$ die Konvergenz von $(g_1(u_{1m}(x), \dots, u_{nm}(x), x), \dots, g_n(u_{1m}(x), \dots, u_{nm}(x), x))$ nach $(g_1(u_1(x), \dots, u_n(x), x), \dots,$

$g_n(u_1(x), \dots, u_n(x), x)$ bei $m \rightarrow \infty$ folgt, so besitzt das homogene System mindestens eine abzählbare Menge von Eigenfunktionen, die $L_{2,n}$ angehören und im Mittel nach Null konvergieren. — Anschließend werden verschiedene Kriterien angegeben, wann die Bedingung des Satzes bezüglich der Funktionen g_i erfüllt ist, z. B. wenn die $g_i(u_1, \dots, u_n, x)$ für alle Veränderlichen u_i stetig und für x in B meßbar sind und für jede in $L_{2,n}$ kompakte Menge $(u_1(x), \dots, u_n(x))$ der Ungleichung $|g_i(u_1(x), \dots, u_n(x), x)| \leq L_i(x) \in L_2$ genügen oder wenn sie der Lipschitzbedingung genügen: $|g_i(v_1, \dots, v_n, x) - g_i(u_1, \dots, u_n, x)| \leq a \sum_{k=1}^n |v_k - u_k|$.

Erik Svenson.

• **Doetsch, G.: Handbuch der Laplace-Transformation. Band I: Die theoretischen Grundlagen der Laplace-Transformation.** (Lehrbücher u. Monographien. Math. Reihe, Bd. 14.) Basel: Verlag Birkhäuser 1950, 581 S. Ganzl. Fr. 78.—, brosch. Fr. 74.—.

Verf. gedenkt, zwei Bände herauszugeben. Im vorliegenden Band wird die Theorie der L -Transformation dargestellt, während im 2. Band die Beschreibung der Anwendungen erfolgen soll. Die Beweise sind im allgemeinen so abgefaßt, daß die Sätze sowohl für das Lebesguesche als auch das Riemannsche Integral gelten. Das Buch behandelt die L -Transformation im eigentlichen Sinn, nicht die Laplace-Stieltjes-Transformation. Um jedoch den Anschluß an jenes Gebiet zu ermöglichen, gibt der Verf. eine Darstellung der Grundlagen des Stieltjes-Integrals. Es ist nicht nur die einseitige, sondern in weiterem Umfange auch die zweiseitige L -Transformation und damit auch die Mellin-Transformation berücksichtigt. — Gegenüber der im Jahre 1937 erschienenen Monographie des Verf. enthält dieses Handbuch neben zahlreichen Verschärfungen und Erweiterungen bekannter, grundlegender Sätze die Darstellung neuer Gebiete. Beispielsweise sind die Theorie der Faltung und das komplexe Umkehr-Integral wesentlich ausführlicher behandelt worden. — Als neues und bisher nicht veröffentlichtes Kapitel kann die

Darstellung des Partialintegrals $f(s, t) = \int_0^t e^{-s\tau} F(\tau) d\tau$ mittels eines komplexen Inte-

grales über $f(s) = \int_0^\infty e^{-s\tau} F(\tau) d\tau$ bezeichnet werden. Mit seiner Hilfe kann das Konvergenz-

problem der L -Transformation behandelt werden. Darunter versteht der Verf. die Frage nach den Bedingungen hinsichtlich der Konvergenz von $L(F)$, wenn $f(s)$ gewisse funktionentheoretische Bedingungen erfüllt. — Die Parsevalsche Gleichung wird nicht nur im Spezialfall der ganzen Funktionen vom Exponentialtyp wie früher behandelt. — Zwecks praktischer Ausführung der Umkehrung der L -Transformation gibt der Verf. verschiedene Reihenentwicklungen, beispielsweise nach Laguerreschen Polynomen. — Ebenfalls neu ist das Kapitel über die Cesaroische Summierung des L -Integrals. Die Grundlage bildet der Satz, daß das (C, k) -Mittel durch ein gewöhnliches, absolut konvergentes L -Integral darstellbar ist. Dazu wird die Darstellung des (C, k) -Mittels durch ein komplexes Integral über $f(s)$ gezeigt. — Da die Gesamtheit aller L -Transformationen keinen funktionentheoretisch bestimmbareren Raum bilden, erhebt sich die Frage nach bestimmten Klassen von Originalfunktionen, deren Bilder selbständig charakterisierbare Klassen ausmachen. Verf. behandelt drei solche Klassen: Die ganzen Funktionen vom Exponentialtypus, die in einem Streifen analytischen Funktionen und die Funktionen der Klasse L^2 . Verf. stellt vergleichende Betrachtungen zwischen Potenzreihen, fastperiodischen Funktionen und L -Transformationen besonders hinsichtlich der Parsevalschen Gleichung und der komplexen Umkehrformel an. — Der letzte Teil behandelt die Abelschen und Tauberschen Sätze, die gegenüber früher vermehrt wurden. Bemerkenswert ist eine neue Gruppe von Abelschen Sätzen über das komplexe Umkehrintegral, von denen der Verf. neue Anwendungen auf die asymptotische Entwicklung von Funktionen ankündigt. — Verf. formuliert an zahlreichen Stellen ungelöste Probleme. Ebenso gibt er viele illustrierende Beispiele für die allgemeinen Sätze, vorzugsweise aus der Theorie der Besselfunktionen. — Trotz den zahlreichen kriegsbedingten Schwierigkeiten hat Verf. wohl die gesamte, große Literatur über die L -Transformation zusammengestellt und gehörig verarbeitet. Das neue Handbuch dürfte deshalb in der großen, vor allem in englischer Sprache erschienenen Lehrbücher-Literatur über L -Transformation für längere Zeit eine überragende Rolle spielen.

Walter Saxon.

• **Voelker, D. und G. Doetsch: Die zweidimensionale Laplace-Transformation. I. Teil. Eine Einführung in ihre Anwendung zur Lösung von Randwertproblemen nebst Tabellen von Korrespondenzen.** (Lehrbücher und Monographien. Math. Reihe Band 12.) Basel: Verlag Birkhäuser 1950. 259 S. Ganzl. Fr. 43.—, brosch. Fr. 39.—.

Die 2-dimensionale L -Transformation wird durch die Gleichung (Gl.) definiert

$$f(u, v) = \int_{x \geq 0} \int_{y \geq 0} e^{-ux - vy} F(x, y) dx dy.$$

Es handelt sich im vorliegenden Buch um die erste systematische Darstellung dieser Transformation, deren fundamentale Eigenschaften und Anwendungsmöglichkeiten bis heute nur teilweise bekannt waren. Die Verff. demonstrieren die Transformation zunächst an einer partiellen Differentialgl. erster Ordnung mit 2 unabhängigen Variablen und konstanten Koeffizienten. Dieses Beispiel zeigt bereits die charakteristischen Eigenschaften der Methode. Man kann Fälle behandeln, die mit der gewöhnlichen eindimensionalen L -Transformation zu Schwierigkeiten führen. Während es bei der praktischen Anwendung der eindimensionalen L -Transformation hauptsächlich darauf ankommt, zu möglichst vielen speziellen Funktionen ihre Bilder zu kennen, und die Anzahl der allgemeinen Operationen an Funktionen (wie Differentiation, Integration, Faltung etc.), deren Bilder man kennen muß, verhältnismäßig klein ist, liegen die Verhältnisse bei der 2-dimensionalen Transformation gerade umgekehrt. In der im Bildbereich gefundenen Lösung treten Operationen auf wie etwa $\frac{f(u, v) - f(v, u)}{u - v}$, die aus einer Funktion $f(u, v)$ von 2 Variablen eine andere Funktion erzeugt. Diese Möglichkeiten zur Erzeugung neuer Funktionen sind unbegrenzt, und viele von ihnen treten tatsächlich bei der Lösung von Differentialgl. auf. Aus diesem Grunde enthält das Buch im 2. Teil sehr umfangreiche Tabellen — das Wörterbuch der 2-dimensionalen L -Transformation, die für viele Operationen die nötigen Bilder zur Verfügung stellen. — Die Methode wird an den bekannten Typen von partiellen Differentialgl. 2. Ordnung mit 2 unabhängigen Variablen wie Wärmeleitungsgl., Wellengl., Telegraphengl., Potentialgl. erprobt. Es ergibt sich eine Lösung des Dirichletschen Problems für die Viertelebene, die von ganz anderem Typus ist als die durch das Poissonsche Integral gelieferte. Die besonderen Schwierigkeiten hängen damit zusammen, daß die Lösung nicht eindeutig ist, sondern daß Lösungen existieren, die in der abgeschlossenen Viertelebene stetig sind und überall die Randwerte 0 haben. — Nach diesen speziellen Typen wird die allgemeine partielle Differentialgl. 2. Ordnung behandelt, dazu ein ziemlich allgemeines System von 2 partiellen Differentialgl. 1. Ordnung. Alle diese Gl. mit 2 unabhängigen Variablen gehen durch Anwendung der doppelten L -Transformation in gewöhnliche algebraische Gl. über. Bei 3 Variablen ist die Bildgl. selbst wieder eine Differentialgl., in der transzendente Funktionen auftreten können. Als Beispiel einer solchen wird die Wärmeleitung in einer Platte behandelt. — Zum Schluß wird an einigen schlagenden Beispielen gezeigt, wie man bei der 2-dimensionalen L -Transformation oft auf sehr einfachem Weg Funktionalrelationen und Reihenentwicklungen aus ganz elementaren Beziehungen mittelst der 2-dimensionalen L -Transformation gewinnen kann. Dank der ausführlichen Darstellung der Anwendungen dürfte das Buch in erster Linie Ingenieure und Physiker interessieren.

Walter Saxer.

Barrucand, Pierre: Sur les transformées de Fourier et de Mellin des inverses de fonctions de Bessel. C. r. Acad. Sci., Paris **231**, 102—104 (1950).

Es sei $s = \sigma + i t$ mit reellen σ und t , κ_n die n -te positive Nullstelle der Funktion $J_0(x)$ und $\kappa'_n = 1/J_1(\kappa_n)$. Zum Kehrwert von $I_0(x) = J_0(i x)$ findet Verf. das Fouriersche Bild

$$(1) \quad \int_0^\infty [2 I_0(x)]^{-1} \cos s x \, dx = (\pi/2) \Phi(s), \text{ wo } (2) \quad \Phi(s) = \sum_{n=1}^\infty \kappa'_n \exp(-\kappa_n s)$$

in $|t| < 1$ regulär und gerade ist. Sein Mellinsches Bild ermittelt er, indem er zuerst (2) nach Mellin abbildet,

$$(3) \quad \int_0^\infty \Phi(x) x^{s-1} dx = \Gamma(s) Z(s), \text{ wo } (4) \quad Z(s) = \sum_{n=1}^\infty \kappa'_n \kappa_n^{-s},$$

und nun mit Hilfe von (3) und der Umkehrung von (1) zu

$$(5) \quad \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{2 I_0(x)} dx = \frac{\pi}{2 \sin(\pi s/2)} Z(1-s)$$

übergeht. (4) ist eine in $\sigma < 0$ reguläre Funktion, — mit den negativen ganzen Zahlen als (einfachen) Nullstellen, darin ähnlich der Funktion $L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^{-s}$. (Den Vergleich der Verteilung der komplexen Nullstellen von (4) und $L(s)$ stellt Verf. zur Erörterung. — Seine Ergebnisse erlauben viele Integrale in Reihen zu entwickeln, wie

$$\int_0^{\infty} \frac{Y_0(xy)}{2 I_0(y)} dy = - \int_1^{\infty} \frac{\Phi(xy)}{\sqrt{y^2-1}} dy = - \sum_{n=1}^{\infty} \kappa'_n K_0(\kappa_n x).$$

L. Koschmieder.

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Julia, Gaston: Les racines, carrées et $n^{\text{ièmes}}$, des opérateurs hermitiens dans l'espace unitaire ou hilbertien. Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. Nr. 24 (Algèbre et théorie des nombres, Paris 25. 9. — 1. 10. 1949), 195—198 (1950).

Zusammenfassende Darstellung der in acht früheren Noten [C. r. Acad. Sci., Paris 222, 707—709, 829—832, 1019—1022, 1161—1163, 1465—1468 (1946) und dies. Zbl. 35, 70, 71] gewonnenen Ergebnisse.

Gottfried Köthe.

Plesner (Pleßner), A.: Konstruktion des adjungierten Bildes eines selbstadjungierten Operators. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 66, 557—560 (1949) [Russisch].

$\Gamma_A \subset \hat{H}$ sei das v. Neumannsche [Ann. Math., Princeton, II. S. 33, 294—310 (1932); dies. Zbl. 4, 216] Bild („Graph“) eines symmetrischen Operators A mit dem Definitionsbereich $\mathcal{Q}_A \subset H$; $\hat{H} = H \oplus H$. In \hat{H} sei der Operator O durch $O[f, g] = [-g, f]$ erklärt. $\Gamma_A^* = \hat{H} \ominus O \bar{\Gamma}_A$ ist bekanntlich, falls $\bar{\mathcal{Q}}_A = H$, das Bild von A^* ; Verf. nennt auch bei $\bar{\mathcal{Q}}_A \neq H$ (wo A^* nicht existiert) Γ_A^* „adjungiertes Bild von A “ und beweist eine direkte Summenzerlegung $\Gamma_A^* = \bar{\Gamma}_A + T_\lambda + T_{\bar{\lambda}}$; hierbei ist λ eine beliebige nichtreelle Zahl und T_λ die Menge der $[g, \bar{\lambda}g] \in \Gamma_A^*$. Bei Projektion auf den Abszissenraum gilt bei $\bar{\mathcal{Q}}_A \neq H$ die eindeutige Summendarstellung nicht mehr; über die Art der Vieldeutigkeit werden weitere Aussagen gemacht.

Franz Wecken.

Glazman, I.: Über den Defektindex der Differentialoperatoren. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 64, 151—154 (1949) [Russisch].

Mit den reellen meßbaren Funktionen $p_0(t), p_1(t), \dots$ in $0 < t < \infty$, die noch gewisse Integrabilitätsbedingungen erfüllen, und mit $d/dt = D$ wird der formal selbstadjungierte reelle Differentialausdruck

$$l = (-D)^n p_0 D^n + (-D)^{n-1} p_1 D^{n-1} + \dots + p_n$$

gebildet. Die Frage nach der Zahl m der linear unabhängigen in $L_2(0, \infty)$ liegenden Lösungen $\psi(t)$ der Gleichung $l(\psi) = \lambda \psi$ für nichtreelles λ behandelte Weyl (1910) für $n=1$, Windau (1921) für $n=2$, Šin (1940) für beliebiges n . Nach Šin ist stets entweder $m=n$ oder $m=2n$. Aber 1944 wurde bei Windau und Šin ein Fehler entdeckt. Verf. findet nun hier, daß m alle und nur die Werte mit $n \leq m \leq 2n$ annimmt. — l erzeugt zunächst (mittels Abschließung) einen „minimalen“ Hermiteschen Operator L in $L_2(0, \infty)$, der die Defektindizes (m, m) hat und auf den die v. Neumannsche Fortsetzungstheorie angewandt wird. Mittels der Begriffe „totalstetig“ und „Derivierte“ werden Definitionsbereich und Bildungsgesetz von L^* angegeben (Satz 2). Stets ist $n \leq m \leq 2n$ (Satz 3). Setzt man

$p(t) = 1 + t$, $l_1 = -ipDp$, $l_2 = D^2 - 1$, so erzeugt $l = l_1^{m-n} l_2^{2n-m} l_1^{m-n}$ einen Operator L vom Grade $2n$ und Defektindex m (Satz 5). Beweise sind z. T. angegeben.

Franz Wecken.

Tseng, Ja. Ju.: Verallgemeinerte Inverse nicht-beschränkter Operatoren zwischen zwei unitären Räumen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 67, 431—434 (1949) [Russisch].

Ausgehend von klassischen Untersuchungen (Toeplitz-Julia) über die Inversen unendlicher Matrizen und anknüpfend an Moores Begriff der verallgemeinerten Inversen behandelt Verf. das gleiche Problem mit modernen abstrakten operatorenthoretischen Methoden. Es seien $\mathfrak{M}^1, \mathfrak{M}^2$ unitäre Räume von beliebiger Dimension mit gleichem Zahlkörper (reell, komplex oder Quaternionen); es sei $A = A^{12}$ ein (unbeschränkter) linearer Operator mit $\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{D}^1 \subset \mathfrak{M}^1$, $\mathfrak{D}^1 = \mathfrak{M}^1$, $\mathfrak{R}(A) = \mathfrak{D}^1 A \subset \mathfrak{M}^2$; $\mathfrak{R}(A)$ sei die Menge der $f \in \mathfrak{D}^1$ mit $fA = 0$. Dann und nur dann, wenn jedes $f \in \mathfrak{D}^1$ sich zerlegen läßt in $f = f_0 + f_1$ mit $f_0 \in \mathfrak{R}(A)$, $f_1 \perp \mathfrak{R}(A)$, besitzt A einen verallgemeinerten inversen Operator (kurz „v. I.“) R mit den Eigenschaften $\mathfrak{D}^1 A \subset \mathfrak{D}^2 = \mathfrak{D}(R)$, $\overline{\mathfrak{D}^2} = \mathfrak{M}^2$, $\mathfrak{D}^2 R \subset \mathfrak{D}^1$; $AR = P^1$, $RA = P^2$; hier sind P^1, P^2 die durch $\mathfrak{D}^2 \bar{R} = \mathfrak{M}^1 P^1$, $\overline{\mathfrak{D}^1 A} = \mathfrak{M}^2 P^2$ definierten Projektoren. Es gibt dann unter den v. I. von A einen maximalen („m. I.“), R_A , aus dem alle anderen v. I. durch Einengung des Definitionsbereiches zu gewinnen sind; es ist $\mathfrak{R}(R_A) = \mathfrak{M}^2(I^2 - P^2)$ ($I^2 = \text{Einheit in } \mathfrak{M}^2$). — Einer im allgemeinen nicht exakt lösbaren Funktionalgleichung $xA = g$ wird eine „extremale virtuelle Lösung“ x_* zugeordnet mittels der Forderungen $\|xA - g\| = \min$, $\|x\| = \min$. — Auf die Bedeutung der sehr allgemein formulierten Sätze für die Ausgleichsrechnung wird hingewiesen. — Weitere Sätze beziehen sich auf die Operatorengleichung $AXA = A$ und auf die v. I. bzw. m. I. zu A^* (adjungiert) und \tilde{A} (abgeschlossene Hülle).

Franz Wecken.

Tseng, Ja. Ju.: Eigenschaften und Klassifikation der verallgemeinerten Inversen abgeschlossener Operatoren. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 67, 607—610 (1949) [Russisch].

(Vgl. vorsteh. Referat.) Es sei, außer den obigen Voraussetzungen, A abgeschlossen; dann existiert A^* und ein abgeschlossener Operator R , so daß A und R sowie A^* und R^* wechselseitig m. I. zueinander sind. $\mathfrak{D}_r^1 = \mathfrak{R}(R)$ heißt reduzierter Definitionsbereich; es ist $\mathfrak{D}^1 = \mathfrak{D}_r^1 \oplus \mathfrak{R}(A)$, $\overline{\mathfrak{D}_r^1} = \mathfrak{R}(A^*)$. Mittels der (selbstadjungierten, nichtnegativen) Operatoren $Q_1 = AA^*$ und $Q_2 = A^*A$ werden die zu A bzw. A^* metrisch gleichen Operatoren $B_1 (= \sqrt{Q_1})$, $B_2 (= \sqrt{Q_2})$ eingeführt; mit passendem isometrischen W wird $A = B_1 W$, $A^* = B_2 W^*$, $R = B_2^{-1} W^*$, $R^* = B_1^{-1} W$; B_1^{-1} und B_2^{-1} sind als m. I. gemeint. Zahlreiche Beziehungen zwischen den durch \mathfrak{D} , \mathfrak{R} und \mathfrak{R} zu definierenden Teilmengen von \mathfrak{M}^1 und \mathfrak{M}^2 werden aufgestellt. R ist dann und nur dann beschränkt, wenn $\mathfrak{D}^1 A$ abgeschlossen ist; hierfür werden weitere äquivalente Formulierungen angegeben. — Stets ist $\mathfrak{D}_r^1 \subset \overline{\mathfrak{D}_r^1} \subset \mathfrak{M}^1$, $\mathfrak{D}^1 A \subset \overline{\mathfrak{D}^1 A} \subset \mathfrak{M}^2$; da jedes \subset durch $=$ ersetzt sein kann, ergeben sich $2^4 = 16$ Möglichkeiten. Für 12 von diesen 16 Fällen werden Aussagen über Räume, Schranken und spektrales Verhalten von A und A^* bei $\lambda = 0$ gemacht. — Eine Fortsetzung der Untersuchung wird angekündigt.

Franz Wecken.

Walters, Stanley S.: The space H^p with $0 < p < 1$. Proc. Amer. math. Soc. 1, 800—805 (1950).

H^p est l'espace des fonctions holomorphes dans le cercle unité et telles que
$$\|f\| = \left(\sup_{0 \leq r < 1} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p} < \infty.$$
 $\|f\|$ n'est pas une norme, mais une quasi-norme, car au lieu de l'inégalité triangulaire elle satisfait à $\|f + g\| \leq 2^{(1-p)/p} (\|f\| + \|g\|)$. Cependant, $\|f\|$ permet de définir une topologie sur H^p en prenant les sphères

$\|f - f_0\| < r$ comme éléments générateurs des ouverts. Avec cette topologie, H^p est un espace vectoriel topologique séparé, complet et admet une base dénombrable; enfin, la formule $\varphi(e^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 1} f(r e^{i\theta})$ réalise un isomorphisme algébrique de H^p sur un sous-espace vectoriel fermé de $L^p(0, 2\pi)$ avec conservation des quasi-normes (quasi-norme et topologie définies sur L^p par

$$\|\varphi\| = \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\varphi(e^{i\theta})|^p d\theta \right]^{1/p}$$

et les sphères $\|\varphi - \varphi_0\| < r$). — Le dual de $L^p(0, 2\pi)$ ne contient que la fonctionnelle nulle [Cf. M. D. Day, Bull. Amer. math. Soc. **46**, 816–823 (1940); ce Zbl. **24**, 211]. Il n'en est pas de même de H^p : Si $\gamma_{n,z}(f) = \frac{f^{(n)}(z)}{n!}$, $\gamma_{n,z} \in H^{p*}$ et on a

$$\|\gamma_{n,z}\| \leq \frac{\varrho_{n,z}}{(\varrho_{n,z} - |z|)^{n+1} (1 - \varrho_{n,z})^{1/p}} \text{ avec}$$

$\varrho_{n,z} = [|z|(1-p) + p n + \{[|z|(1-p) + p n]^2 + 4 p |z| (p n + 1)^{1/2}\} / 2 (p n + 1)]$. Il en résulte qu'il y a une suite $\{\eta_n\}$ de fonctionnelles linéaires sur H^p telle que si $f \in H^p$ et $f \neq 0$, $\eta_n(f) \neq 0$ pour au moins une valeur de n . — La convergence faible peut être définie sur H^p et on montre que $f_n(z)$ converge uniformément sur tout compact du cercle unité vers sa limite faible, si celle-ci existe. *André Revuz.*

Taylor, Angus E.: On certain Banach spaces whose elements are analytic functions. Actas Acad. nac. Ci. exact., fis. natur. Lima **12**, 31–43 (1949).

H^p sei der lineare Raum aller in $|z| < 1$ analytischen Funktionen $f(z)$, für die $\left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r e^{i\theta})|^p d\theta \right]^{1/p}$ für $0 \leq r < 1$ beschränkt bleibt. Führt man die obere Grenze dieser Ausdrücke als $\|f\|$ ein, so wird H^p ein Banachraum. Mit L^p werde der Banachraum der komplexen, fast überall auf dem Einheitskreis C erklärten Funktionen $\lambda(e^{i\theta})$ mit integrierbarem $|\lambda(e^{i\theta})|^p$ bezeichnet mit

$$\|\lambda\| = \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\lambda(e^{i\theta})|^p d\theta \right]^{1/p}.$$

Die Grenzfunktion von $f(r e^{i\theta})$, $f \in H^p$, für $r \rightarrow 1$ liegt nun in L^p , und die Menge aller dieser Grenzfunktionen bildet einen abgeschlossenen Teilraum M von L^p , der aus allen $\lambda(e^{i\theta})$ besteht, deren Fourierkoeffizienten $\lambda_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} \lambda(e^{i\theta}) d\theta$ für $n = -1, -2, \dots$ verschwinden. H^p ist also isometrisch M . Die Abbildung $P\lambda = \lambda^+(e^{i\theta}) = \frac{1}{2}(\lambda(e^{i\theta}) + i\lambda^*(e^{i\theta}))$ mit $\lambda^*(e^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} -i\lambda_n e^{in\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} i\lambda_{-n} e^{-in\theta}$ ist eine Projektion von L^p auf M . Im Fall $p > 1$ läßt sich nun durch Betrachtung von M die Gestalt der stetigen Linearfunktionen $W(f)$ auf H^p allgemein bestimmen. Sie haben die Form $W(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t)F(t)}{t} dt$ mit $F(t) \in H^q$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$,

und $F(t)$ und $W(f)$ bestimmen sich gegenseitig eindeutig. Schließlich wird gezeigt, daß eine Folge $f_n(z) \in H^p$, $p > 1$, dann und nur dann schwach konvergent gegen $f \in H^p$ ist, wenn $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_n(r e^{i\theta})|^p d\theta$ in n und $0 \leq r < 1$ gleichmäßig beschränkt ist und außerdem $f_n(z) \rightarrow f(z)$ gleichmäßig in $|z| < 1$ gilt. *Gottfried Köthe.*

Morse, Marston and William Transue: A characterization of the bilinear sums associated with the classical second variation. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. **28**, 25–68 (1949).

This paper is one of a series of publications by the same authors devoted to the theory of bilinear functionals over the product $A \times B$ of two Banach spaces

with a view to applications to classical problems (this Zbl. 32, 28, 209; 33, 359; 35, 71; 36, 363), in particular to the Calculus of Variations [Goldstine, H. H., Contrib. Calculus Variations, Chicago 1933—1937, 313—357 (1937); this Zbl. 17, 264]. — IL_2 denotes the class of indefinite L -integrals of functions in L_2 over $[0, 1]$. With the classical second variation is associated a bilinear form

$$J(u, v; P, Q, R, E)$$

$$= \int_0^1 [R(s) \dot{u}(s) \dot{v}(s) + Q(s) (u(s) \dot{v}(s) + v(s) \dot{u}(s)) + P(s) u(s) v(s)] ds + E(u, v)$$

defined for $u, v \in IL_2$. $R(s)$, $0 \leq s \leq 1$, is bounded p. p., $Q \in L_2$, $P \in L$. $E(u, v)$ (end form) is a symmetric form bilinear in the two sets of variables $[u(0), u(1)]$ and $[v(0), v(1)]$. $\hat{J}(u; P, Q, R, E) = J(u, u; P, Q, R, E)$. As a generalization of J the authors consider bilinear sums $S(p, q, r)$ with values

$$S(u, v; p, q, r) = F(\dot{u}, \dot{v}; r) + F(u, \dot{v}; q) + F(v, \dot{u}; q) + F(u, v; p)$$

for $u, v \in IL_2$; p, q, r represent distribution functions relative to $C \times C$, $C \times L_2$ and $L_2 \times L_2$, $F(-, -; p)$, $F(-, -; q)$, $F(-, -; r)$ the bilinear forms corresponding to the kernels p, q, r respectively. When the interval $[0, 1]$ is replaced by a subintervall $[a, b]$, $J, \hat{J}, S, \hat{S}, F, IL_2$, become $J_a^b, \hat{J}_a^b, S_a^b, \hat{S}_a^b, F_a^b, IL_2[a, b]$. The main object of the paper is to obtain necessary and sufficient conditions on the „extremals“ of $\hat{S}(p, q, r)$ that $S(u, v; p, q, r) = J(u, v; P, Q, R, E)$ for suitable choice of P, Q, R and E . A generalized Euler equation for \hat{S}_a^b is defined. An extremal of \hat{S}_a^b is any solution of this equation for which u is in $IL_2[a, b]$. In case $1/R$ and Q/R are in L_2 , J is termed essentially non-singular. Under this assumption: (α) Each extremal u of \hat{J} , with $u(s)$ restricted to $[a, b]$ defines an extremal of \hat{J}_a^b . (β) For each point c in $[0, 1]$ there is at least one extremal u_c such that $u_c(c) = 1$. (γ) There is at least one pair of extremals u, v whose Wronskian $u(s) \dot{v}(s) - \dot{u}(s) v(s) = W(s)$ exists with $W(s) \neq 0$ p. p. on $[0, 1]$, but not every $u \in IL_2$ is an extremal. A counter-example shows that neither (α), (β), nor (γ) holds in general when \hat{J} is replaced by $\hat{S}(p, q, r)$. A distribution-function k is said to be a triangle d -function if it is symmetrical, and if $k(s, t) = k(s, 1)$ for $0 \leq s \leq t \leq 1$. An admissible bilinear sum $S(p, 0, r) = S(p, r)$ has a unique representation $S(p', r')$ in which p' is a delete triangle d -function, termed normal representation. Th. 1: A bilinear sum $S(p, r)$ which satisfies (α), (β), (γ) equals a suitably chosen essentially non-singular J for every u, v in IL_2 . Th. 2: A necessary and sufficient condition that a bilinear sum $S(p, r)$ equal a suitably chosen essentially non-singular J for every u, v in IL_2 is that the corresponding normal representation of $S(p, r)$ satisfy (α), (β), (γ).

Christian Pauc.

Hewitt, Edwin: Linear functionals on spaces of continuous functions. Fundamenta Math., Warszawa 37, 161—189 (1950).

L'A. étudie les fonctionnelles linéaires bornées $I(f)$ définies sur l'espace $C(X, R)$ des fonctions réelles continues $f(x)$ définies sur l'espace topologique complètement régulier X . [$I(f)$ bornée veut dire $\sup I(f) < \infty$ pour $\varphi_1 \leq f \leq \varphi_2$, $\varphi_1, f, \varphi_2 \in C(X, R)$]. — 1. Représentation de $I(f)$ par une intégrale. Si $P(f) = E(x; x \in X; f \in C(X, R); f(x) > 0)$, $P(X)$ désigne l'ensemble de tous les $P(f)$ et $P(\overline{X})$ est la plus petite algèbre de Boole contenant $P(X)$. Une mesure finie, complètement additive γ définie pour tous les ensembles de $P(\overline{X})$ est dite mesure de Baire. γ est régulière, si pour tout $A \in P(\overline{X})$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $G \in P(X)$ tel que $G \supset A$ et $|\gamma(G) - \gamma(A)| < \varepsilon$. — Théorème: Pour toute $I(f)$, il existe une mesure de Baire γ (unique si elle est régulière) telle que toute $f \in C(X, R)$ soit bornée sauf peut-être sur un ensemble E avec $\gamma(E) = 0$, et telle que $I(f) = \int_X f(x) d\gamma$. — γ est la mesure définie par la mesure extérieure $\gamma^*(A) = \inf \nu(G), G \supset A, G \in P(\overline{X})$ avec $\nu(G) = \sup I(f)$, $0 \leq f \leq \varphi_G$ où φ_G est la fonction caractéristique de G . Le succès de ces définitions est dû au fait que les complémentaires des ensembles de $P(X)$ jouissent de la même propriété que les ensembles fermés d'un espace normal, à savoir que si A et B sont disjoints, il existe $g \in C(X, R)$ avec $g = 0$ sur A et $g = 1$ sur B . — 2. Locali-

sation de la mesure. Ce qui précède ne suppose pas que X soit compact, cependant si X est ce que l'A. appelle un espace- Q , c'est-à-dire est tel que tout homomorphisme d'anneau de $C(X, R)$ sur R (Hom.) soit de la forme $M_p: f \rightarrow f(p)$ où $p \in X$, il existe un ensemble compact $F \subset X$, tel que $\gamma^*(F) = \gamma(X)$, que la restriction de γ^* à F rende mesurables tous les ensembles de $\mathcal{P}(F)$, et que l'on ait $\int_F f(x) d\gamma^* = \int_X f(x) d\gamma$. — 3. Continuité. Une fonctionnelle sur $C(X, R)$ est dite p -, k -, ou u -continue suivant qu'elle est continue pour la topologie de la convergence simple, compacte ou uniforme sur $C(X, R)$. L'A. établit les énoncés suivants: 1. Les fonctionnelles linéaires p -continues peuvent être représentées sous la forme $I = \sum_{i=1}^n \alpha_i M_{p_i}$, α_i réels. La condition

nécessaire et suffisante pour qu'il y ait identité entre les combinaisons linéaires d'Hom. et les fonctionnelles linéaires p -continues est que X soit un espace- Q . 2. Toute fonctionnelle linéaire k -continue est bornée, et peut être représentée par $I(f) = \int_F f(x) d\gamma^*$ (Notations du § 2, mais il n'est pas nécessaire de supposer ici que X est un espace- Q). Si X est un espace- Q , la condition nécessaire et suffisante pour que $I(f)$ soit bornée est qu'elle soit k -continue. — 4. Dual de $C(X, R)$. B est l'espace de toutes les fonctionnelles linéaires bornées sur $C(X, R)$. On désigne par b_u et b_k les topologies sur B de la convergence uniforme dans les parties de $C(X, R)$ bornées pour les topologies u et k respectivement. 1. Pour b_u , B est un espace vectoriel normé, en général non complet. La propriété „la sphère unité $S(1)$ est faiblement compacte“ n'est pas vérifiée. Mais si l'on définit la topologie $*$ faible (moins fine que la topologie faible) en prenant comme système fondamental de voisinages de 0 les ensembles de fonctionnelles vérifiant $|I(f_i)| < \varepsilon$ ($i = 1, 2, \dots, n$), f_i = fonction bornée $\in C(X, R)$, on peut énoncer: „ $S(1)$ est $*$ faiblement compacte“. Enfin, les points extrêmes de $S(1)$ sont les fonctionnelles linéaires telles que $f \rightarrow -I(f)$ soit un Hom. 2. Si X est un espace- Q , pour b_k , B est un espace vectoriel topologique localement convexe, complet, partiellement ordonné. André Revuz.

Klee jr., V. L.: Decomposition of an infinite-dimensional linear system into ubiquitous convex sets. Amer. math. Monthly 57, 540—541 (1950).

An ubiquitous convex set, in a vector space over the real numbers, is defined as one for which $\text{lin } X = L$, where L denotes the vector space, X a convex set in L and $\text{lin } X$ stands for $X \cup Y$, Y being the union of all the points y such that the semi open interval $[y, x]$, $y \in Y$, $x \in X$, be contained in X . (For the notation $[y, x]$, see Bourbaki, Livre I, p. 34; this Zbl. 26, 389.) — The author establishes the following theorem: If the space L is infinitely dimensional, if N denotes a cardinal number lying between 2 and the cardinal number of the Hamel basis of L , then L may be considered as the union of N pairwise disjoint ubiquitous convex sets. — The author makes the remark that L may be topologized in such a manner that ubiquitous, convex, sets be dense in L . He had proved formerly [Duke math. J. 16, 351—354 (1949); this Zbl. 31, 218] that, under certain restrictive conditions, a similar theorem was holding, the wording being the same to the exception of the term „ubiquitous“ which had to be replaced by „dense“. The article under review gives a considerable generalization of the results published previously. C. Racine.

Tulcea, Ionescu C. T. and G. Marinescu: Théorie ergodique pour des classes d'opérations non complètement continues. Ann. Math., Princeton, II. S. 52, 140—147 (1950).

W. Doeblin et R. Fortet [Bull. Soc. Math. France 65, 132—148 (1937); ce Zbl. 18, 33] dans leur étude de chaînes aléatoires à liaisons complètes ont introduit (loc. cit., p. 143) une opération linéaire U définie ainsi: e désigne un espace distancié compact, φ_i , $i = 1, 2, \dots, r$ des transformations non dilatantes de e en lui-même, $a_i(x)$ des fonctions (numériques) définies sur e telles que Σ borne sup. $|a_i(x)|$ soit ≤ 1 , $C^{(1)}$ l'espace des fonctions lipschitziennes sur e où norme de f = borne sup. $|f(x)|$ + borne sup. $(|f(x'') - f(x')| \text{ distance } x''x')$, $U(f) = \Sigma a_i(x) f(\varphi_i(x))$. Les résultats de F. Riesz dans le cas d'opérations complètement continues ont été étendus à U . Les présents auteurs généralisent l'opération U de la manière suivante: S désigne un espace distancié compact, W un ensemble, F une famille borélienne de parties de W , $P(t, A)$ une fonction complexe définie sur $S \times F$ qui pour t fixe est (complètement) additive sur F et de variation totale ≤ 1 et telle que $|P(t'', A) -$

$P(t', A) \leq K \cdot (\text{distance } t''t')^d$, ($0 < d \leq 1$), K et d représentant des constantes. Pour tout x de W est définie une transformation univoque $y(t, x)$ de S dans S telle que distance $y(t'', x) y(t' x) \leq r \cdot \text{distance } t''t'$, où r est une constante comprise entre 0 et 1, et que pour t fixe et tout ensemble borélien B de S l'image réciproque de B par $y(t, x)$ appartienne à F . $(C L^d)$ désigne l'espace de Banach des fonctions complexes lipschitziennes définies sur S , normé par $\|f\| = \max |f(t)| + \text{borne sup. } |(f(t'') - f(t'))| / (\text{distance } t''t')^d$, (C) l'espace des fonctions continues complexes définies sur S normé par la convention habituelle $\|f\| = \max |f(t)|$. L'opération T généralisant U est définie sur $(C L^d)$ par $Tf = \int_W P(t, dx) f(y(t, x))$. La contri-

bution principale de l'article consiste dans l'extraction des propriétés de T assurant l'extension de la théorie de F. Riesz indépendamment de la définition de T par une intégrale. Voici les hypothèses abstraites: E désigne un espace de Banach de norme $|x|$, B un espace de Banach de norme $\|x\|$, partie linéaire de E . Si une suite d'éléments de B est de B -normes uniformément bornées par K et $\lim \|x_n - x\| = 0$, x appartient à B et $\|x\| \leq K$. T est une opération linéaire de B dans B telle que $\|T^n\|_B \leq \text{constante}$ pour $n = 1, 2, \dots$; $\|Tx\| \leq r \cdot \|x\| + R \cdot |x|$, R et r désignant deux constantes positives, $0 < r < 1$; toute partie bornée dans B est transformée par T en une partie compacte de E .
Christian Pauc.

Marinescu, G.: Opérations relativement complètement continues. Studii Cerc. mat. Acad. Republ. popul. Române Inst. Mat. 2, 107—154. russische Zusammenfassg. 155—171 und französ. Zusammenfassg. 172—188 (1950) [Rumänisch].

L'A. généralise la théorie ergodique dans les espaces de Banach [Cf. K. Yosida et S. Kakutani, Ann. Math. Princeton, II. S. 42, 188—228 (1941); ce Zbl. 24, 324] en se plaçant dans des espaces vectoriels quasi-normés [c'est-à-dire satisfaisant aux mêmes axiomes que les espaces normés à ceci près que l'inégalité triangulaire est remplacée par $|x + y| \leq \mu [|x| + |y|]$, $\mu \geq 1$, cf. D. H. Hyers, Bull. Amer. math. Soc. 51, 1—21 (1945)] et en considérant ce qu'il appelle des opérations relativement complètement continues (r. c. c.), c'est-à-dire des opérations T appliquant un espace vectoriel quasi-normé L dans lui-même, et telles que, L' étant un sous-espace vectoriel de L (L' possède une quasi-norme propre qui peut être différente de celle de L), on ait: 1. $T(L) \subset L$, $T(L') \subset L' \subset L$, 2. T est continue de L à L , de L' à L et de L' à L' , 3. T transforme tout ensemble borné de L' en un ensemble compact de L . — L'A. établit que les résultats de Riesz relatifs aux opérations complètement continues dans les espaces de Banach demeurent valables pour les opérations r. c. c. dans les espaces vectoriels quasi-normés. Il démontre plusieurs théorèmes ergodiques nouveaux dans les espaces vectoriels quasi-normés et étend les conditions de validité des résultats de K. Yosida et S. Kakutani. — Un dernier chapitre contient des applications (équations intégrales, mouvement d'une particule dans un fluide) et un exemple d'opération r. c. c. satisfaisant aux conditions supplémentaires figurant dans l'énoncé des théorèmes ergodiques et qui cependant n'est pas complètement continue.
André Revuz.

Praktische Analysis:

Unger, H.: Nichtlineare Behandlung von Eigenwertaufgaben. Z. angew. Math. Mech. 30, 281—282 (1950).

Die Note skizziert Anwendungsmöglichkeiten des Newtonschen Näherungsverfahrens auf algebraische Eigenwertaufgaben der Form $\alpha x = \lambda x$ und allgemeinerer Formen. Eine Komponente des Eigenvektors x wird zu 1 normiert, die übrigen Komponenten und der Eigenwert λ werden als Unbekannte eines nicht-linearen Gleichungssystems behandelt.
Helmut Wielandt.

Banachiewicz, Tadeusz: Sur la résolution des équations normales de la méthode des moindres carrés. C. r. Soc. Sci. Lett. Varsovie, (Cl. III, 41, 63—67 und polnische Zusammenfassg. 68 (1950).

Verf. „vereinfacht seine Auflösungsmethode der Quadratwurzeln“, bei der er übersieht, daß es sich um das seit 1924 bekannte Verfahren von Cholesky handelt. Die beabsichtigte Vereinfachung wird durch Hinzunahme einer Koeffizientenreihe erkauft und führt auf genau die gleichen Operationen wie die Cholesky-Methode. Das gleiche gilt für die anschließend behandelte Zerlegung der Matrix in zwei verschiedene Dreiecksmatrizen, übrigens gleichfalls dem Prinzip nach als „abgekürzter“ oder „modernisierter Gaußscher Algorithmus“ bekannt. Neu ist gegenüber den Vorgängern die Rechenanordnung in Form eines Matrizenproduktes „Krakowianenprodukt“ des Verf.). Bei der engen Verwandtschaft des Vorgehens mit dem Gaußschen Algorithmus ist um so befremdlicher die wenig sachliche Kritik dieses Algorithmus (vom Verf. als „gravement défectueux“ bezeichnet) sowie der bewährten Gaußschen Symbole $[i\ j\ k]$ („Ils ont joué leur rôle dans l'obscurcissement du problème“). Hier wird übersehen, daß das neue Vorgehen, bei dem man diese Symbole nicht braucht, nur dann sinnvoll und vorteilhaft ist, wenn man die auftretenden Produktschritte unmittelbar durch Auflaufenlassen in der Rechenmaschine bildet, ein Gesichtspunkt, der zur Zeit der Entstehung des Algorithmus und einer Symbolik praktisch ausschied.

Rudolf Zurmühl.

Blieff, Ljubomir: Über die Newtonschen Näherungswerte. Annuaire Univ. Sofia, Fac. Sci., Livre I 46, 167—170 und deutsche Zusammenfassg. 171 (1950) [Bulgarisch].

Soit $f(x)$ un polynôme de degré n dont tous les zéros sont réels et simples. L'A. propose de trouver des conditions suffisantes pour que la suite x_0, x_1, x_2, \dots déterminée par son premier membre x_0 et par la formule de récurrence

$$x_{k+1} = x_k - f(x_k)/f'(x_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

soit convergente. En désignant par $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ les zéros de $f(x)$ et par $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$ les zéros de $f'(x)$ rangés par ordre de grandeur croissante il démontre que $\lim x_k$ existe lorsque x_0 appartient à un des intervalles $(-\infty, \beta_1), (\beta_{n-1}, +\infty)$, $(\alpha_k - \frac{n}{2n-1} d_k, \alpha_k + \frac{n}{2n-1} d_k)$, $k = 2, 3, \dots, n-1$ où $d_k = \min(\alpha_k - \beta_{k-1}, \beta_k - \alpha_k)$.

L. Tchakaloff.

Steinhaus, Hugo: On the length of empirical curves. Časopis Mat. Fys., Praha 74, Nr. 4, 303 [Polnisch] und 304 [Englisch] (1950).

Man kann einer Kurve (approximativ) eine Länge L p -ter Ordnung zuordnen, indem man diese mit durchscheinendem Papier bedeckt, welches ein System paralleler Geraden im Abstand d trägt, die Anzahl der Schnittpunkte der Parallelen mit der Kurve zählt, nach Drehung des Papiers um π/k die Abzählung wiederholt und so fort, wodurch man Schnittpunktsanzahlen n_1, n_2, \dots, n_k erhält. Sei $n'_i = n_i$ für $i \leq p$, $n'_i = p$ für $n_i > p$. Dann ist $L = \sum_{i=1}^k n'_i d \frac{\pi}{2k}$.

Leo Schmetterer.

Reiz, Anders: Quadrature formulae for the numerical calculation of mean intensities and fluxes in a stellar atmosphere. Ark. Astron., Stockholm 1, Nr. 13, 47—153 (1950).

In den Arbeiten von Chandrasekhar wird die Gaußsche Methode zur numerischen Quadratur zur Lösung von Strahlungsgleichgewichtsproblemen herangezogen. Nach dieser gilt näherungsweise

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) w(x) dx \approx \sum_{i=1}^v p_i f(x_i),$$

wobei die x_i die Nullstellen gewisser orthogonaler Polynome sind. Hier werden die

p_i und x_i in Tabellen angegeben für die Gewichtsfunktionen $w(x) = \int_1^{\infty} e^{-tx} t^{-n} dt$ und e^{-x} bis zu Werten von $\nu = 4$ bzw. 5.

Gerd Burkhardt.

Lehmann, N. J.: Zur Praxis der Eigenwerteingrenzung. Z. angew. Math. Mech. 30, 282—283 (1950).

Das Vergleichsverfahren zur Einschließung der Eigenwerte λ_ν einer linearen Differentialgleichung beruht auf der Courantschen Darstellung $\lambda_\nu = \max \min q[y]$, wobei $q[y]$ der Quotient gewisser aus der Differentialgleichung zu gewinnender quadratischer Integralformen in y und seinen Ableitungen ist. Üblicherweise versucht man q zwischen zwei Quotienten abgeänderter Integralformen einzuschließen $q \leq \underline{q} \leq \bar{q}$, derart daß die Eigenwerte $\underline{\lambda}_\nu$ und $\bar{\lambda}_\nu$ der zu \underline{q} und \bar{q} gehörigen Differentialgleichungen explizit bestimmt werden können; man hat dann $\underline{\lambda}_\nu \leq \lambda_\nu \leq \bar{\lambda}_\nu$. Die Anwendungsfähigkeit dieses Verfahrens wird vom Verf. wesentlich erweitert durch die Bemerkung, daß es genügt, q zwischen zwei monoton wachsende Funktionen von q und \bar{q} einzuschließen: $f(q) \leq q \leq F(\bar{q})$; man hat dann $f(\underline{\lambda}_\nu) \leq \lambda_\nu \leq F(\bar{\lambda}_\nu)$. Am Beispiel einer gewöhnlichen Differentialgleichung 4. Ordnung wird gezeigt, daß man auf diesem Wege unter Benutzung einer einzigen Vergleichs-Differentialgleichung (d. h. mit $q = \bar{q}$, $f \neq F$) zu oberen und unteren Schranken für alle Eigenwerte λ kommen kann.

Helmuth Wielandt.

Imai, Isao: Asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the second order. Phys. Rev., Lancaster Pa., 11. S. 80, 1112 (1950).

Es wird ein Näherungsverfahren zur Lösung der Differentialgleichung $d^2\Phi/dx^2 + a^2 P(x)\Phi = 0$ für den Grenzfall sehr großer Werte des Parameters a angegeben. Dabei wird als neue unabhängige Veränderliche $z = \int_0^x [P(y)]^{1/2} dy$ und als neue abhängige Veränderliche $\psi = P^{1/2}\Phi$ eingeführt.

Fritz Sauter.

Charkevič, Ju. F.: Graphische Lösung partieller Differentialgleichungen vom parabolischem Typus. Priklad. Mat. Mech., Moskva 14, 303—310 (1950) [Russisch].

The author's general idea is to replace the partial differential equation by a set of difference equations, in which the difference intervals are so chosen that the difference equations are soluble by successive application of the ruler to the graphs of initial and boundary data. In the case of $u_{xx} = a^2 u_t$ he derives the difference equations $u_{i,k+1} = \frac{1}{2}(u_{i-1,k} + u_{i+1,k})$. Thus starting with given values for $k = 0$ on the graph, the values for $k = 1$, $i \geq 1$ are to be found by taking the means of alternate pairs for $k = 0$, and this may be done with a ruler. He extends the method to $u_t = k^2 u_{xx} - \beta' u$, and to equations in which u_{xx} is replaced by $u_{xx} + u_{yy}$ or $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$. Some numerical examples are worked, and seem to give good agreement with analytical solutions. There are illustrative diagrams.

Frederik V. Atkinson.

Picone, Mauro: Nouveaux points de vue dans l'analyse des périodes. Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. Nr. 14 (Méthodes de calcul dans des problèmes de mécanique, Marseille 30. 3. — 6. 4. 1948; Paris 8. — 9. 4. 1948), 40—44 (1949).

Eine fundamentale Aufgabe der Periodenforschung, die in der Praxis durch verschiedene Methoden (wie z. B. die von Labrouste und Vercelli) gelöst wurde ist folgende: Eine Funktion $f(t)$ ist im Intervall $-\infty \cdots +\infty$ definiert, aber nur für $0 \leq t \leq T$ bekannt. Die Größe ε sei die obere Grenze der Fehler, die der Messungen von $f(t)$ anhaften. Mann soll dann eine ganze Zahl n und (reelle oder komplexe) Konstanten $c_1, c_2, \dots, c_n, z_1, z_2, \dots, z_n$ bestimmen, so daß im ganzen

Definitionsbereich $\left| f(t) - \sum_{k=1}^n c_k e^{z_k t} \right| < \varepsilon$. Dieses Problem wird hier vom streng

mathematischen Standpunkte aus diskutiert. Insbesondere werden zwei Hauptprobleme gelöst: A. Die Konstanten c_k und z_k so zu bestimmen, daß die obige Ungleichung im Intervall $0 \dots T$ erfüllt ist. B. Wenn die Funktion $f(t)$ im Intervall $0 \dots T$ bekannt ist, zu entscheiden, ob sie einer linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten gehorcht, deren Ordnung n kleiner als eine vorgegebene Zahl N ist. Wenn ja, sollen n und die Konstanten c_k und z_k so bestimmt werden, daß die Ungleichung erfüllt ist.

Karl Stumpff.

Couffignal, L.: *Réalisation mécanique des calculs nécessités par la méthode de recherche des périodes de Mme et M. Labrouste.* Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. Nr. 14 (Méthodes de calcul dans des problèmes de mécanique, Marseille 30. 3. — 6. 4. 1948; Paris 8. — 9. 4. 1948), 45—48 (1949).

H. und Y. Labrouste haben eine Methode zur Auffindung versteckter Periodizitäten in Beobachtungsreihen erfunden, die darin besteht, aus den äquidistanten Ordinaten y_v der Beobachtungsreihe gewisse lineare Kombinationen

$$R_{i,m} = K_0 y_i + \sum_{j=1}^m K_j (y_{i-j} + y_{i+j})$$

mit dem laufenden Index i zu bilden, die bei geeigneter Wahl der Konstanten K_j die Eigenschaft haben, die in der Reihe vorhandenen Perioden teils zu verstärken, teils zu unterdrücken. Jede K -Kombination hat also einen wohlbestimmten selektiven Effekt. Verf. demonstriert das Verfahren an einem Beispiel und beschreibt einen im Labrousteschen Laboratorium verwendeten Apparat zur Erleichterung der bei der Anwendung der Methode notwendigen Rechenarbeiten.

Karl Stumpff.

● **Sumjagskij, B. M.:** *Tabellen für die Lösung kubischer Gleichungen.* Moskau u. Leningrad: Staatsverlag für techn.-theor. Literatur 1950. 135 S. 3.90 R. [Russisch].

Die kubische Gleichung wird in der Form $z^3 + Az - A = 0$ angesetzt. Die Lösungen seien mit $z_1, z_{2,3} = -z_1/2 \pm i z_1 \alpha$ bezeichnet. Die Werte z_1 und α sind auf 3 bzw. 4 Stellen tabelliert und zwar für

$$8 \cdot 10^{-9} \leq A \leq 300 \quad \text{und} \quad -8 \cdot 10^{-9} \geq A \geq -6,75.$$

Eine Sondertabelle umfaßt die Fälle dreier reeller Wurzeln ($-6,75 \geq A \geq -300$).

Wolfgang Hahn.

● **Stanley, J. P. and M. V. Wilkes:** *Table of the reciprocal of the gamma function for complex argument.* Toronto: Computation Centre, University of Toronto 1950. \$ 4.50.

Es handelt sich um die wohl heute umfangreichste Tabellierung der reziproken Gammafunktion $1/\Gamma(z)$ für komplexes Argument $z = x + i y$. Real- und Imaginärteil sind für $x = -0,50$ (0,01) 0,50 und $y = 0,00$ (0,01) 1,00 mit sechs Dezimalen bei einer maximalen Fehlerschranke von 0,7 Einheiten der letzten Dezimale vertafelt. Die Berechnung wurde unter Benutzung bekannter Reihenentwicklungen mit der programmgesteuerten elektronischen Rechenmaschine „EDSAC“ in Cambridge (England) durchgeführt. Dabei mußten bis zu 21 Glieder der Reihenentwicklung berücksichtigt werden. Die Kontrolle der Tafel wurde durch Differenzenbildung mit der National Buchungsmaschine vorgenommen. — Zur Berechnung von Funktionswerten außerhalb des vertafelten Bereiches werden die 1. und 3. Funktionalgleichung der Gammafunktion herangezogen. Die Tafel enthält keine Angaben über die Berechnung von Zwischenwerten innerhalb des Tafelbereiches.

Heinz Unger.

● **Küstner, H.:** *Fünfstellige Logarithmen der natürlichen Zahlen und der Winkelfunktionen bei dezimal geteiltem Altgrad.* Berlin und Leipzig: Verlag Volk und Wissen 1950. VI, 157 S.

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung:

• Carnap, Rudolf: Logical foundations of probability. Chicago: The University of Chicago Press 1950. XVII, 607 p. \$ 12.50

Verf. stellt sich die Aufgabe, die bei der Induktion und der Wahrscheinlichkeitsrechnung auftretenden Begriffe logisch einwandfrei zu klären. Er kommt zunächst zu dem Ergebnis, daß eine Wahrscheinlichkeitstheorie innerhalb der deduktiven Logik allein nicht aufgebaut werden kann. Die zur Ergänzung unbedingt notwendige induktive Logik ist nach seiner Auffassung die Theorie eines Explicatums für „Wahrscheinlichkeit“. Diese versteht er nicht als eine relative Häufigkeit, sondern im klassischen Sinne und im Sinne des Sprachgebrauchs des täglichen Lebens. Er erläutert sie zunächst probeweise als Grad der Bekräftigung (confirmation) oder als das faire Einsatzverhältnis für eine Wette oder auch als Schätzwert einer relativen Häufigkeit. Sie wird zweckmäßig nur auf den logischen Zusammenhang zwischen Aussagen aufgebaut, nicht auf Beziehungen zwischen „Ereignissen“. Sie ist immer eine Funktion von zwei Argumenten, der gegebenen Einsicht (evidence), dargestellt durch als wahr vorausgesetzte Sätze, und der betrachteten Hypothese. Die gesuchte induktive Logik wird an die deduktive Logik angeschlossen durch die Hinzunahme der grundlegenden Definition der Bekräftigungsfunktion c . Die Theorie ist vorerst nur durchführbar in einer besonders einfachen Sprache \mathcal{L}_N oder \mathcal{L}_∞ . Es dürfen in ihr höchstens abzählbar unendlich viele Individuen und endlich viele Eigenschaften und Relationen auftreten. Von diesen muß verlangt werden, daß sie logisch voneinander in dem Sinne unabhängig sind, daß niemals eine Klasse von atomaren Sätzen und Negationen anderer atomarer Sätze auf Grund ihrer inhaltlichen Bedeutung einen anderen atomaren Satz oder seine Verneinung fordert. Ferner muß Vollständigkeit gefordert werden: Das System der Eigenschaften und Relationen muß so umfassend sein, daß es alle Attribute der betrachteten Individuengesamtheit auszudrücken gestattet. Für die Wahrscheinlichkeitstheorie besonders wichtig sind die „Zustandsbeschreibungen“, das sind Sätze, die alle Individuen der Gesamtheit hinsichtlich aller im System ausdrückbaren Attribute festlegen. Bei einer ein-eindeutigen Abbildung der Individuen des Systems aufeinander kennzeichnen isomorphe Zustandsbeschreibungen eine „Struktur“. Quantitativ übersehbar werden die Verhältnisse bei der Beschränkung auf eine Sprache, in der nur Eigenschaften, keine Relationen, vorkommen. In dieser sind die wichtigsten Ausdrücke die „ Q -Prädikate“, das sind solche, die jedes Individuum so genau wie möglich festlegen, also über jede Eigenschaft die Aussage „zutreffend“ oder „nicht zutreffend“ machen. Strukturen sind in diesem Falle durch die Angabe der Anzahlen der in den Zustandsbeschreibungen auftretenden gleichen Q -Prädikate charakterisiert. Für den Aufbau der induktiven Logik hält es Verf. für zweckmäßig, eine Metasprache zu benutzen und von der Semantik Gebrauch zu machen. Die Sätze der Objektsprache sind seine Argumente, deshalb gehen Namen von Sätzen als Argumentausdrücke in seine Formulierungen ein. Auf diese Weise vermeidet er die Komplikation, die induktive Logik als Modalitätenlogik aufbauen zu müssen. Diese Wahl ist jedoch für die Durchführbarkeit des Systems nicht entscheidend. — Die für die induktive Logik charakteristische Funktion ist der Grad der Bekräftigung (degree of confirmation) $c(h, e)$. Sie soll ein Maß dafür sein, in welchem Grade eine Hypothese h durch eine Einsicht e bekräftigt wird. Ihr Wert ist die Wahrscheinlichkeit der Hypothese h auf Grund der Einsicht e . Sie wird zurückgeführt auf die reguläre Maßfunktion m . Diese ist innerhalb einer Sprache \mathcal{L}_N durch die beiden Eigenschaften definiert, daß für jeden Zustand ihr Wert eine positive reelle Zahl ist und die Summe der Funktionswerte für alle möglichen Zustände in \mathcal{L}_N gleich 1 ist. Für einen Satz ist die Maßfunktion die Summe aller Maßfunktionswerte derjenigen Zustände, für die der Satz gilt. Die reguläre Bekräftigungsfunktion wird eingeführt durch $c(h, e) = m(e \wedge h) / m(e)$, also als Quotient aus dem Maß für den Durchschnitt der Gültigkeitsbereiche der Evidenzsätze e und der Hypothese h zum Maß für den Gültigkeitsbereich von e . Dabei ist der Gültigkeitsbereich lediglich durch den logischen Zusammenhang der Sätze (ohne Rückgriff auf ihre inhaltliche Bedeutung) bestimmt. Die Maßfunktion m wird zunächst quantitativ nicht näher bestimmt. Dies hat zur Folge, daß für gegebenes e , h und r sich immer eine Bekräftigungsfunktion c so angeben läßt, daß $c(h, e) = r$ ist. Aus diesem Grunde können in diesem Stadium der Theorie auch nur Sätze von geringer Tragweite abgeleitet werden. Dies gilt auch für das auf dieser Stufe bereits ableitbare Theorem von Bayes. Liegen (außer den logischen Tautologien) überhaupt keine gültigen Sätze als Evidenz vor, so kann ein Anfangsbekräftigungsgrad $c_0(j)$ für einen Satz j (Null-confirmation) eingeführt werden, der sich gleich dem regulären Maß $m(j)$ ergibt. Es ist bemerkenswert, daß es zu dieser Anfangswahrscheinlichkeit einer Hypothese kein Korrelat in der Häufigkeitsdeutung der Wahrscheinlichkeit gibt. Aus den Maßfunktionen läßt sich ein Relevanzmaß aufbauen, das eindeutig darüber Auskunft gibt, ob eine neue Einsicht den Bekräftigungsgrad einer Hypothese positiv oder negativ beeinflusst oder belanglos ist. — Einen wichtigen Schritt bedeutet die Einführung der symmetrischen Maßfunktionen; diese sind reguläre Maßfunktionen, die für alle isomorphen Zustandsbeschreibungen den gleichen Wert haben. Für die darauf aufgebauten

symmetrischen Bekräftigungsfunktionen hat dies zur Folge, daß diese ihren Zahlenwert nicht ändern, wenn in den Sätzen andere Individuen eingesetzt werden. In dieser Festsetzung kommt uns schärfsten der rein logische Aufbau der Theorie zum Ausdruck. Alle zu einer Klasse gehörenden Individuen sind vollständig dadurch bestimmt, daß sie gewisse Attribute haben oder nicht haben können. Ihr Name dient nur zur Unterscheidung und liefert keine zusätzliche Kenntnis. Ihre Auswechslung muß belanglos sein. Die Einführung der symmetrischen Bekräftigungsfunktion gestattet bereits die Ableitung von Sätzen größerer Tragweite vor allem beim Schluß von einer Gesamtheit auf eine Probe. Bei der Deutung der Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit tritt hier das Problem der Zufälligkeit der Auswahl auf. In der Carnap'schen Formulierung tritt an ihre Stelle die Forderung, daß in der gegebenen Einsicht alle verfügbare Kenntnis enthalten sein muß. Werden über ein Individuum keine Angaben gemacht, so schließt dies ein, daß darüber nur bekannt ist, daß es zur Gesamtheit gehört. Die Bekräftigungsfunktion $c(h, e)$, in der h eine individuelle oder statistische Verteilung ausdrückt, läßt sich in diesem Falle quantitativ angeben, insbesondere erhält man hieraus auch eine quantitative Angabe über die Wahrscheinlichkeit, daß irgendein einzelnes Individuum eine bestimmte Eigenschaft hat. Für nicht zu kleine Anzahlen gilt näherungsweise die Newton'sche Binomialformel, in der Grenze für unbegrenzt viele Individuen ergibt diese den Grenzwert der Wahrscheinlichkeit. Praktisch ist dies jedoch von geringer Bedeutung, da ja die Kenntnis der statistischen Verteilung in der unendlichen Gesamtheit vorausgesetzt werden muß. Auch das Bernoullische Theorem erweist sich als gültig, wenn gewisse Voraussetzungen über die Anzahlen der Probanden und der Gesamtzahl gemacht werden. Der Verf. führt sodann den Begriff der „Schätzung“ einer Größe ein (estimation), der dem Erwartungswert der Statistik entspricht. Er leitet ab, daß für alle symmetrischen c -Funktionen der Schätzungswert einer relativen Häufigkeit in einer Probe gleich der relativen Häufigkeit in der Gesamtheit ist. Die Vertrauenswürdigkeit einer Schätzung wird gemessen durch den Schätzungswert des Fehlerquadrats, für den eine Formel angegeben wird. — Mehr Voraussetzungen fordert eine „Voraussage“, die Schätzung von einer Probe auf eine andere, nicht übergreifende Probe (predictive estimation). Doch gilt allgemein für jede symmetrische c -Funktion, daß der Schätzungswert einer relativen Häufigkeit in einer beliebigen Probe gleich dem Bekräftigungsgrad irgendeiner zugehörigen Einzelvoraussage ist. Dies trifft auch noch für unendlich viele Elemente zu. Obwohl hier der Grenzwert der relativen Häufigkeit unbestimmt ist und von der Ordnung der Elemente abhängt, ist ihr Schätzungswert aus einer endlichen Probe zu entnehmen (weil er als Grenzwert der Schätzungswerte für endlich viele Elemente definiert ist). Dieser Bekräftigungsgrad darf jedoch nicht gleich der relativen Häufigkeit in der Ausgangsprobe gesetzt werden. Diese „straight rule of estimation“, daß der Schätzungswert einer relativen Häufigkeit gleich der beobachteten relativen Häufigkeit ist, ist mit jeder symmetrischen c -Funktion in Widerspruch. — In einem Anhang gibt Verf. einen Ausblick auf einen zweiten folgenden Band seines Werkes. Er führt Resultate an, die er mit einer besonderen Maßfunktion m^* , der besten ihm bekannten, erhalten hat. Er verlangt von ihr, daß sie symmetrisch ist und alle Strukturbeschreibungen in ihr gleichberechtigt sind. Daraus ergibt sich $m^*(\beta_i) = 1/\tau \zeta_i$ (τ Zahl der Strukturen in \mathfrak{L}_N und ζ_i Zahl der zu β_i isomorphen Zustände). Bemerkenswert ist, daß eine Maßfunktion, die alle Zustände als gleichberechtigt nimmt, sich unbestreitbar als ungeeignet erweist. Bei einer Beschränkung auf Q -Unterteilungen besagt dies, daß nicht individuelle Verteilungen, sondern statistische Verteilungen zugrunde gelegt werden müssen. Für die Voraussage (Schluß von einer Probe auf eine andere) ergibt Carnap's Maßfunktion schon im einfachsten Falle bei Q -Unterteilungen Ergebnisse, die sowohl von der Laplaceschen Formel wie von der straight rule abweichen. Hier gehen noch für den logischen Aufbau der benutzten Sprache charakteristische Zahlen ein, die Anzahl der möglichen Eigenschaften und die logische Weite (Anzahl der Disjunktionsglieder von der Form der Q -Ausdrücke in einer Disjunktion, die der in Frage stehenden Aussage äquivalent ist). Auf diese Weise gelingt es Carnap auch, den Bekräftigungsgrad eines Analogieschlusses zu messen. Von besonderer Bedeutung für jede naturphilosophische Fragestellung ist der Bekräftigungsgrad einer allgemeinen Aussage von der Art eines Naturgesetzes. Hier folgt das bemerkenswerte, aber plausible Resultat, daß der Bekräftigungsgrad mit wachsender Zahl der Individuen, für die das Gesetz gelten soll, abnimmt, daß somit jedes Gesetz, das unbeschränkt viele Kontrollversuche zuläßt, auch nach beliebig vielen Bestätigungen den Bekräftigungsgrad null hat. Carnap weist in diesem Zusammenhang darauf hin, daß die Praxis nicht das Naturgesetz als solches fordert, sondern lediglich die an Gewißheit grenzende Wahrscheinlichkeit, daß jeweils die zeitlich nächsten Experimente im Sinne des Gesetzes ausfallen. Für eine solche Einsetzung nähert sich der Bekräftigungsgrad mit wachsender Bestätigungszahl in der Tat dem Wert 1 unabhängig von der Gesamtzahl der Versuchsmöglichkeiten. — Zusammenfassend möchte ich sagen: Carnap's Werk ist der erste geglückte Versuch einer Lösung des Induktionsproblems. Die Frage: „Was kann aus einem n mal positiven Versuchsergebnis auf den Ausgang des $(n+1)$ -ten Versuches geschlossen werden?“ wird hier m. W. das erste Mal so gestellt, daß klar wird, unter welchen Voraussetzungen sie heute überhaupt beantwortbar ist und wie die Antwort, quantitativ formuliert, in einfachen Fällen lautet. Diese Aufgabe wird gelöst durch die Einführung einer Maßfunktion für den Bekräftigungsgrad einer Hypothese

aus einer vorliegenden Einsicht. Dieser Bekräftigungsgrad wird als Definition für den Begriff „Wahrscheinlichkeit“ eingeführt. Er ist vollständig bestimmt durch die logischen Kombinationsmöglichkeiten in einer für die Formulierung aller zur Konkurrenz zugelassenen Aussagen notwendigen und ausreichenden Sprache. Damit ist gleichzeitig das in den letzten Jahrzehnten viel umstrittene Anwendungsproblem der Wahrscheinlichkeitstheorie einer Lösung zugeführt. Im einzelnen liefert die Theorie alle notwendigen Grundformeln für den mathematischen Ausbau der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik; gerade da, wo die frühere Statistik mehrere Möglichkeiten zuließ, gibt sie eindeutige Vorschriften, die meistens von allen bisherigen Formeln abweichen. Andererseits ist die Carnapsche Wahrscheinlichkeitsrechnung in vielen ihrer quantitativen Aussagen vorerst auf eine sehr arme Sprache (nur abzählbar viele Individuen, nur endlich viele Eigenschaften, keine Relationen) beschränkt. Dieser Nachteil bedeutet, positiv gewendet, die Erkenntnis, daß die Anwendbarkeit der üblichen Wahrscheinlichkeitstheorie über diesen Bereich hinaus auf schwachen Füßen steht. Die in Aussicht gestellte Fortsetzung des Werkes läßt vor allem hinsichtlich der Einzelergebnisse auch für den Praktiker interessante Erkenntnisse erwarten.

A. Kratzer.

Cansado, Enrique: A systematic exposition of Pearson's distributions. Trabajos Estadíst., Madrid 1, 279—288 und engl. Zusammenfassg. 289—296 (1950) [Spanisch].

Es wird von einigen transzendenten Integralen, darunter auch den Eulerschen Integralen erster und zweiter Gattung, ausgegangen, deren Integranden positiv sind und nach entsprechender Normierung als Wahrscheinlichkeitsverteilungen gedeutet werden können. Mit Hilfe dieser Funktionen wird eine formalmathematische Systematik für Häufigkeitsverteilungen dargelegt, unter welche neben der Normalverteilung, der χ^2 -Verteilung, der Studentschen t -Verteilung und der Fisherschen z -Verteilung u. a. auch die wichtigsten Pearsonschen Verteilungen fallen.

Hans Gebelein.

Cansado, Enrique: Logarithmico-Pearson distributions. Trabajos Estadíst., Madrid 1, 297—305 und engl. Zusammenfassg. 306—313 (1950) [Spanisch].

Dieser Artikel schließt sich einer Reihe ähnlicher Arbeiten des gleichen Verf. an, bei denen es sich um eine formalmathematische Systematik der wichtigsten Verteilungsfunktionen der theoretischen Statistik handelt. Hier werden die charakteristischen Funktionen (Fourier-Transformierten) derjenigen Verteilungen betrachtet, die entstehen, wenn man die Merkmalskala der Pearsonschen Verteilungen, der Normalverteilung usw. exponentiell verzerrt. Es stellt sich heraus, daß bei diesen sog. logarithmischen Verteilungen der bekanntesten Häufigkeitsgesetze die charakteristischen Funktionen sich alle ziemlich einfach mittels Gammafunktionen darstellen lassen.

Hans Gebelein.

Pólya, G.: Remarks on computing the probability integral in one and two dimensions. Proc. Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probability (August, 1945 and January, 1946), 63—78 (1949).

Verschiedene Methoden zur Berechnung des Wahrscheinlichkeitsintegrals, deren

eine auf der Ungleichung $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-x}^x e^{-t^2/2} dt < (1 - e^{-2x^2/\pi})^{1/2}$ beruht und die Tatsache benützt, daß $e^{x^2/2} \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ der Gleichung $y' = xy + 1$ [$y(0) = 0$] genügt. Die

hier weiter gegebene Berechnung des Fehlerintegrals vermöge komplexer Integration findet sich auch bei Mirsky [Math. Gaz. London 33, 249 (1949)]. Im zweidimensionalen Fall wird u. a. eine Näherungsformel für den Wert des Integrales in einem Rechteck entwickelt und eine umhüllende Reihe (vgl. Pólya und Szegő, Aufgaben und Lehrsätze, Berlin 1925, p. 26) für den Wert im Dreieck gegeben. [Hierfür dient ein einfacher, nicht uninteressanter Hilfssatz über umhüllende Reihen, welcher etwa besagt, daß man die Glieder einer umhüllenden Reihe durch diese umhüllende Reihen ersetzen „darf“, wenn man die entstehende Doppelreihe in bestimmter, leicht realisierbarer Weise in eine einfache Reihe ordnet.] Für die Berechnung des Wahrscheinlichkeitsintegrals mittels dieser Reihe weist Verf. auf eine Arbeit von W. F. Sheppard hin [Trans. Cambridge Phil. Soc. 19, 23—68 (1904)].

Leopold Schmetterer.

Aumann, Georg: Über eine Ungleichung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Acta Sci. math., Szeged **13**, 163—168 (1950).

Folgende Ungleichung wird bewiesen:

$$\frac{(2\lambda + 2)^\lambda}{(2\lambda + 1)^{\lambda+1}} \leq \int_0^\infty x^\lambda W(x) dx,$$

falls $\lambda > 0$ und $\int_0^\infty W(x) dx = 1$, $\int_0^\infty W^2(x) dx = 1$ ist. Das Gleichheitszeichen gilt für

$$W(x) = \begin{cases} \frac{(2\lambda + 1)^{\lambda+1}}{2\lambda(2\lambda + 2)^\lambda} \left[\left(\frac{2\lambda + 2}{2\lambda + 1} \right)^\lambda - x^\lambda \right] & \text{für } 0 < x \leq \frac{2\lambda + 2}{2\lambda + 1} \\ 0 & \text{für } x > \frac{2\lambda + 2}{2\lambda + 1} \end{cases}$$

Als Korollarien ergeben sich die Ungleichungen:

$$\int_{-\infty}^\infty w^2(x) dx \cdot \left(\int_{-\infty}^\infty \left(x - \int_{-\infty}^\infty x w(x) dx \right)^2 w(x) dx \right)^{1/2} \geq \frac{3}{5\sqrt{5}}, \text{ falls } \int_{-\infty}^\infty w(x) dx = 1 \text{ ist.}$$

Gleichheit für $w(x) = \frac{3}{4}(1 - x^2)$, falls $|x| \leq 1$, $= 0$ falls $|x| > 1$ und

$$\left[\int_{\bar{R}} w^2(x_1, x_2, \dots, x_n) dm \right]^{1/n} \cdot \left[\int_{\bar{R}} X^2 w(x_1, x_2, \dots, x_n) dm \right] \\ \geq \left(1 + \frac{4}{n} \right)^{-1/2} \left(\frac{n(4 + 2n)}{c_{n-1}(4 + n)} \right)^{1/n},$$

falls $\int_{\bar{R}} w(x_1, x_2, \dots, x_n) dm = 1$, $\int_{\bar{R}} X w(x_1, \dots, x_n) dm = 0$, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

ist; c_{n-1} bezeichnet den $(n-1)$ -dimensionalen Inhalt der $(n-1)$ -dimensionalen Sphäre vom Radius 1. — Es wird auf die Bedeutung dieser Ungleichungen in der Wahrscheinlichkeitsrechnung hingewiesen. John Aczél.

Prochorov, Ju. V.: Über das verstärkte Gesetz der großen Zahlen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **14**, 523—536 (1950) [Russisch].

Ausführliche Darlegung der vom Verf. angekündigten Sätze und Beweise (dies. Zbl. **34**, 225). Das Hauptergebnis kann so formuliert werden: ξ_n sei eine Folge zu-

fälliger unabhängiger Variabler, $\xi_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, $\eta_n = \frac{\xi_n}{n}$, $\chi_r = \frac{1}{2^r} \sum_{n=2^r+1}^{2^{r+1}} \xi_n$, $\chi_0 = \xi_1$.

Dann ist $W(\eta_n - m | \eta_n) \rightarrow 0 = 1$ genau dann, wenn $W(\chi_n - m | \chi_n) \rightarrow 0 = 1$. [$m(\xi)$ ist die Mediane der zufälligen Variablen ξ .] Leopold Schmetterer.

Rényi, Alfréd: Contributions to the theory of independent random variables. Acta math. Acad. Sci. Hung. **1**, 99—107 und engl. Zusammenfassg. 107—108 (1950) [Russisch].

Im Raum M sei ein allgemeines Lebesguesches Maß μ erklärt (im Sinne Rochins, dies. Zbl. **33**, 169), mit $\mu(M) = 1$, welches als stetig vorausgesetzt wird. In üblicher Weise seien zufällige Variable ξ erklärt mit $W(\xi \leq x) = \mu(A(x))$, $A(x)$ die Menge der $a \in M$ mit $\xi(a) \leq x$. $E(\xi) = \int_M \xi d\mu$. Eine Folge zufälliger un-

abhängiger diskreter Variabler ξ_n heißt maximal, wenn aus $\xi_n(a) = \xi_n(b)$ für alle a folgt: $a = b$ (höchstens bis auf eine Nullmenge). Mit Hilfe eines (im wesentlichen bekannten) Hilfssatzes zeigt Verf.: ξ_n sei maximal, $\zeta_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, $E(\zeta_n) = A_n$, $E(\zeta_n - A_n)^2 = B_n^2$, $B_n \rightarrow \infty$, $\eta_n = (\zeta_n - A_n)/B_n$, $F_n(x)$ die zu η_n gehörige Ver-

teilungsfunktion. Aus $F_n(x) \rightarrow \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = \Phi(x)$ folgt dann $F_n(x/A) \rightarrow \Phi(x)$.

wobei $F_n(x/A)$ die bedingte Verteilungsfunktion von η_n unter der Hypothese A bedeutet [$\mu(A) > 0$]. Satz 2 hat die Frage nach der Maßinvarianz des Grenzüberganges zum Gegenstand: Sei $\mu'(A) = \int_A \lambda(a) d\mu$, $\lambda(a) \geq 0$, μ -meßbar, also μ'

total-stetig bez. μ . Unter den Voraussetzungen des Satzes 1 kann man

$$\mu'(A_n(x)) \rightarrow \Phi(x)$$

schließen, $A_n(x)$ die Menge der $a \subset M$ mit $\eta_n < x$. Als Anwendung gibt Verf. zwei Sätze, deren einer als Spezialfall (Rademacher-Funktionen) folgende Bemerkung des Verf. enthält: $A_n(x)$ bezeichne die Menge der Zahlen t , $0 \leq t \leq 1$, in deren Dualbruchentwicklung die Differenz zwischen der Anzahl der Nullen und Einsen in den ersten n Ziffern unterhalb $\frac{1}{2} x \sqrt{n}$ liegt. Dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n(x)) = \Phi(x)$,

$\mu(A) = \int_A \lambda(t) dt$, $\lambda(t) \geq 0$, meßbar, $\int_0^1 \lambda(t) dt = 1$. — Ohne Zweifel sind die Sätze auch für gewisse zahlentheoretische Fragen von Interesse. (Vgl. Verf., dies. Zbl. 36, 87).

Leopold Schmetterer.

Statistik:

• Quenouille, M. H.: *Introductory statistics*. London: Butterworth-Springer 1950. XII, 248 p. 30 s.

Allen, denen die mathematische Fundierung der theoretischen Statistik den Zugang zum Verständnis der hinter ihren Methoden stehenden Vorstellungen und der Anwendungsmöglichkeiten dieser Methoden erschwert, will Verf. mit seinem Buch ein Lehr- und Nachschlagewerk in die Hand geben. Nach Einführung der wichtigsten Darstellungsarten von Beobachtungsreihen, Maßzahlen und Häufigkeitsverteilungen in den ersten beiden Kapiteln, gibt Verf. im folgenden eine Darstellung der bekanntesten statistischen Prüfverfahren unter besonderer Berücksichtigung der zwischen ihnen bestehenden Zusammenhänge. Zunächst werden in drei weiteren Kapiteln das Problem des Vergleichs zweier oder mehrerer Beobachtungsreihen meßbarer und nicht meßbarer Merkmale und die dafür entwickelten Verfahren (Streuungsverhältnis-, t -, χ^2 -Test u. a., Streuungsanalyse) und die dabei benötigten Schätzverfahren behandelt. Im folgenden Kapitel wird dann auf die zur Untersuchung der Beziehungen zwischen Beobachtungsreihen verwendeten Verfahren der Regressions- und Korrelationstheorie und dabei insbesondere auf die bestehenden Zusammenhänge mit der Streuungsanalyse eingegangen. Ein weiteres Kapitel ist dem Vergleich von Regressionen, den hierbei benutzten „Hilfsbeobachtungen“ (concomitant observations) und der Kovarianzanalyse gewidmet. Ein Kapitel über nicht normale Verteilungen und Transformationen zur Gewinnung von Zufallsvariablen, auf die sich die beschriebenen Testverfahren anwenden lassen, und ein Kapitel über Stichprobenentnahmeverfahren (Zufalls-, geschichtete, systematische Entnahme) schließen die Einführung ab. In jedem Kapitel werden in einem ersten Teil das jeweilige Problem und die Anwendung der zu seiner Beantwortung entwickelten Verfahren für den einfachsten Fall dargelegt und dann in einem besonders gekennzeichneten zweiten Teil die zugehörige theoretische Grundlegung, soweit sie sich elementar darstellen läßt, sowie weitergehende Anwendungen geschildert. Jedes Kapitel wird am Schluß kurz zusammengefaßt und durch Aufgaben für den Leser ergänzt. Die zur Anwendung der dargestellten Testverfahren erforderlichen Tabellen sind im Anhang zusammengestellt.

Georg Friede.

• Dalenius, T.: *Bibliography on sampling*. — 2nd ed. Stockholm: Statistical Office of the Swedish Employers' Confederation 1950. 37 S.

Azorín, Francisco: *On peakedness and its measure*. Trabajos Estadíst., Madrid 1, 263—269 und engl. Zusammenfassg. 270—272 (1950) [Spanisch].

After an introduction and some examples illustrating the meaning of kurtosis the author gives three distributions whose first four moments are the same as those of the standard normal distribution, but which exhibit, nevertheless, very different shapes.

Stefan Vajda.

Gumbel, E. J. and R. D. Keeney: *The extremal quotient*. Ann. math. Statist., Baltimore Md. 21, 523—538 (1950).

Es bezeichne q das Verhältnis des größten Wertes zum absoluten Wert des kleinsten innerhalb je einer n -gliedrigen Stichprobe, welche einer solchen unbeschränkten Gesamtheit entnommen wird, die eine streng wachsende und so durch $G(x)$ umkehrbare Verteilungsfunktion $F(x)$ sowie eine stetige symmetrische Dichte $f(x)$ besitzt. Die Note zeigt, daß die Verteilung von q genau so viele Momente wie $F(x)$ besitzt und daß $\log q$ symmetrisch verteilt ist. Weitere allgemeine Ergebnisse

werden auf Gesamtheiten mit Verteilungsfunktionen vom „exponentialen“ sowie vom „Cauchyschen“ Typ angewendet, wobei die letzteren durch die Bedingung $\lim_{x \rightarrow \infty} x^k (1 - F(x)) = A$ bei k und $A > 0$ umgrenzt werden. Nach Einzelergebnissen, welche auch tabellarisch belegt und graphisch beleuchtet werden, wird festgestellt, daß q in beiden Fällen asymptotisch die Verteilung $1/(1 + e^{-t})$ besitzt. Und zwar im ersten Fall mit $t = (q - 1) n f(G(1 - 1/n))$, im zweiten mit $t = k \log q$.

Tibor Szentmártony.

Bahadur, Raghu Raj and Herbert Robbins: The problem of the greater mean. Ann. math. Statist., Baltimore Md. **21**, 469—487 (1950).

Consider two populations with means m_1, m_2 respectively and with common variance. Let samples of sizes n_1 and n_2 be drawn and choose a „decision function“ (v) such that $0 \leq f(v) \leq 1$. [in practice, $f(v)/(1 - f(v))$ is the ratio of items to be selected from the two populations] where v is the set of the $n_1 + n_2$ observations. If we have further a pair of values (g_1, g_2) defined for any pair ω of populations such that $m_i \leq m_j$ implies $g_i \leq g_j$ ($i, j = 1, 2$), then the author introduces, for any ω , a „risk function“ $r(f) = \max [g_1, g_2] - g_1 E(f) - g_2 E(1 - f)$ and the problem dealt with is to determine minimax decision functions $f(v)$, i. e. functions for which $\sup_{\omega} r(\bar{f}) = \inf_f \sup_{\omega} [r(f)]$. The most important cases are given by $(g_1, g_2) = (m_1, m_2)$ and by $(0, 1)$ if $m_1 < m_2$; $(1, 0)$ if $m_1 > m_2$; $(0, 0)$ if $m_1 = m_2$, which is equivalent to $r(f) = \text{prob. of incorrect decision using } f(v)$, provided the two possible decisions are $m_1 \leq m_2$ or $m_1 \geq m_2$. The decision functions exhibited in the paper are all functions only of the sample means and take only values 1 or 0. In particular, in most practical conditions (concerning the possible pairs of populations) the unique minimax decision function is $f(v) = 1$ if $\bar{x}_1 > \bar{x}_2$ and $= 0$ otherwise, at least when n_1, n_2 are large.

Stefan Vajda.

Tocher, K. D.: Extension of the Neyman-Pearson theory of tests to discontinuous variates. Biometrika, Cambridge **37**, 130—144 (1950).

Beim Prüfen von zusammengesetzten Hypothesen über Parameter diskreter Verteilungen ergeben sich dadurch Schwierigkeiten, daß in diesem Fall im allgemeinen keine kritischen Bereiche mit konstanter Wahrscheinlichkeit existieren. Zur Ermittlung „bester“ Testverfahren im Sinne der Neyman-Pearson-Theorie bedarf es daher einer Abänderung der üblichen Definition des Umfangs des kritischen Bereichs, nach der jedem Punkt des Stichprobenraumes eine Zahl ω zugeordnet wird, die für Punkte im kritischen Bereich den Wert 1 und für die übrigen den Wert 0 annimmt. Um den Nachteilen der von G. A. Barnard (dies. Zbl. **29**, 156) und A. Wald [Ann. math. Statist. **10**, 299—326 (1939); dies. Zbl. **24**, 54] vorgeschlagenen Abänderungen zu begegnen, nimmt Verf. zur Untersuchung einen zusätzlichen Zufallsprozeß hinzu, der ω alle Werte zwischen 0 und 1 annehmen läßt. Unter Berücksichtigung dieser Werte und ihrer Wahrscheinlichkeiten definiert er dann den kritischen Bereich des jeweiligen Testverfahrens und dehnt die Neyman-Pearson-Theorie auf diese Verfahren aus. Die erhaltenen Ergebnisse werden auf das Problem der 2×2 -Tafeln angewendet. Dabei wird zugleich auf die Vorteile der getroffenen Abänderung hingewiesen und gezeigt, daß die exakten, von R. A. Fisher (Statistical methods for research workers, 10. ed. 1946) angegebenen Tests in einer etwas abgeänderten Form die bestmöglichen für einseitige Alternativen in allen von Barnard unterschiedenen Fällen sind. Abschließend wird noch ein auf der abgeänderten Definition des kritischen Bereichs beruhendes Testverfahren angegeben, mit dem sich prüfen läßt, ob die Mittelwerte zweier Stichproben aus Gesamtheiten mit Poissonverteilungen gleich sind.

Georg Friede.

Pearson, E. S.: On questions raised by the combination of tests based on discontinuous distributions. Biometrika, Cambridge **37**, 383—398 (1950).

Soll die Richtigkeit einer Annahme über eine Verteilung mit stetiger Dichte durch unabhängige Versuche verschiedener Art geprüft werden, so handelt es sich eigentlich um verschiedene unabhängige Veränderlichen $a_i \leq x_i \leq b_i$ mit Dichten $f_i(x_i)$. Sie können aber nach R. A. Fisher (1932) bei Einführung der über

$(0, 1)$ gleichmäßig verteilten $y_i(x_i) = \int_{a_i}^{x_i} f_i(t) dt$ und dann durch Übergang auf die gemäß χ^2_2 verteilten $z_i = -2 \log y_i$ summiert geprüft werden. Diese Methode kann man auf unstetige Veränderliche mit den Verteilungsfunktionen $F_i(X_i) = \sum_{t=0}^{X_i} f_i(t)$ nicht unmittelbar übertragen — wenn auch nach David und Johnson (dies. Zbl. 38, 288) die Momente von $-2 \log v_i$ der v_i mit den Merkmalwerten $\sum_{t=0}^{k-1} f_i(t) + \frac{1}{2} f(k)$ bei Verdichtung der t -Stellen und $f_i(t) \rightarrow 0$ gegen die Momente von χ^2_2 streben. Verf. beschäftigt sich deshalb mit den 1949 von Lancaster gegebenen Veränderlichen

$$2 - \{F_i(X_i) \log F_i(X_i) - F_i(X_i - 1) \log F_i(X_i - 1)\} / f_i(X_i)$$

bzw. $-2 \log \frac{1}{2} [F_i(X_i) + F_i(X_i - 1)]$ oder $2 - 2 \log F_i(X_i)$, je nachdem $F_i(X_i - 1) \neq 0$ oder $= 0$ ist, sowie mit einer 1949—50 von Eudey, Stevens und Tocher gegebenen Methode. Diese führt durch gewisse, über $(0, 1)$ gleichmäßig verteilte u_i , welche mit einem Hilfsexperiment, etwa nach Auswahl aus einer Zufallszahlen-Tabelle, bestimmt werden, die über $(0, 1)$ stetig und gleichförmig verteilten $y_i(X_i, u_i) = F_i(X_i - 1) + u_i f_i(X_i) = e^{-z_i/2}$ ein und gestattet so, Fishers Verfahren mittelbar auch auf unstetige Veränderliche übertragen. Verf. zeigt zunächst, daß Lancasters Verfahren einer Anwendung der nach den u_i genommenen Mittelwerte bzw. Mediane von $z_i = -2 \log y_i(X_i, u_i)$ entspricht. Das Für und Wider bezüglich dieser und der allgemeineren Methode wird dann an einem vielfältigen und reichem statistischen Material eingehend besprochen. Tibor Szentmártony.

Hemelrijk, J.: A symmetry test. Math. Centrum, Amsterdam, Rapport ZW 1950—015, 9 p. (1950) (hektographiert) [Holländisch].

This paper contains the text of an address given by the author. He constructs a non-parametric test for the symmetry of a continuous distribution function in the following way: let the observed values be z_i ($i = 1, \dots, n$) and their moduli w_i ; let these be ordered so that $w_i > w_{i+1}$. If, then, u and v are the numbers of positive values z_i amongst $w_1, \dots, w_{[(n+1)/2]}$ and amongst the remainder respectively, then the critical region for rejecting the hypothesis is an area in the (u, v) -plane containing the points of the smallest probabilities, which add up (as nearly as possible, because of discontinuity) to the desired level. It is also shown that the test is consistent against a large class of alternatives (i. e. that the probability of rejection, if any of the latter holds, tends to unity as the number of observations increases). The test is a special case out of a larger family of tests of symmetry, described by the author in another paper (this Zbl. 38, 94), where neither continuity, nor identity of the parent distributions of all observations was assumed.

Stefan Vajda.

Aroian, Leo A. and Howard Levene: The effectiveness of quality control charts. J. Amer. statist. Assoc. 45, 520—529 (1950).

Verf. entwickeln Richtlinien zur Beurteilung der Leistungsfähigkeit von Prüfverfahren für die laufende Überwachung eines Produktionsprozesses. Eine derartige Kontrolle wird in der Regel so durchgeführt, daß von den im Abstand einer Zeiteinheit hergestellten Stücken jeweils nach m Zeiteinheiten die letzten k ($k \leq m$) als Stichprobe entnommen und untersucht werden. An Hand einer Kontrolltabelle wird dann auf Grund des Untersuchungsergebnisses entschieden, ob der Prozeß als der Norm entsprechend angesehen werden und daher weiterlaufen kann oder ob er zur Untersuchung auf Fehler anzuhalten ist. Besteht bei dem zugrunde liegenden Testverfahren die Wahrscheinlichkeit α für einen Fehler erster Art, d. h. dafür, daß, obwohl der Prozeß tatsächlich den gestellten Anforderungen entspricht, er auf Grund des Untersuchungsergebnisses an einem Entscheidungspunkt unnötig angehalten wird, und die zunächst

als konstant angenommene Wahrscheinlichkeit γ (= Leistungsfähigkeit des Tests) dafür, daß, wenn der Prozeß von der Norm abweicht, auch der Test daraufhin anspricht, so stellt $g(N) = (1 - \lambda)^{N-1} \cdot \lambda$ die Wahrscheinlichkeit dafür dar, daß der Prozeß beim N -ten Entscheidungspunkt zum ersten Male unnötig angehalten wird, während $f(N) = (1 - \gamma)^{N-1} \gamma$ die Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß der Test erstmalig beim N -ten Entscheidungspunkt auf die Abweichung des Prozesses von der Norm anspricht. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine unnötige Betriebsunterbrechung spätestens beim N -ten Entscheidungspunkt eintritt, ist dann $G(N) = 1 - (1 - \lambda)^N$ und die Wahrscheinlichkeit, daß der Test auf das Abweichen von der Norm spätestens bis zu diesem Punkt anspricht, ist durch $F(N) = 1 - (1 - \gamma)^N$ gegeben. Verff. bezeichnen $g(N)$ als „individual-“ und $G(N)$ als „complete stoppage spacing function“, während $f(N)$ „individual-“ und $F(N)$ „complete effectiveness function“ genannt werden. Im Hinblick auf die Kosten, die durch eine unnötige Unterbrechung des Prozesses oder dadurch entstehen, daß er unbemerkt von der Norm abweicht, ist ein Kontrollverfahren um so leistungsfähiger, je geringer die Anzahl der unnötigen Unterbrechungen ist und je größer die Wahrscheinlichkeit für ein frühzeitiges Ansprechen des Tests auf Abweichungen von der Norm ist. Als Maß für die erste Eigenschaft verwenden Verff. die durchschnittliche Anzahl $1/\lambda$ der unnötigen Unterbrechungen (= average stoppage spacing number) und für die zweite Eigenschaft entweder ebenfalls die durchschnittliche Anzahl $1/\gamma$ der Entscheidungspunkte bis zur Entdeckung der Abweichung (= average efficiency number) oder die Nummer N_ε des Entscheidungspunktes, bis zu dem die Abweichung mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \varepsilon$ entdeckt werden wird. — Neben dem Fall, bei dem die Wahrscheinlichkeit γ für den Produktionsprozeß dauernd konstant ist, wird der Fall betrachtet, daß γ in den einzelnen Entscheidungspunkten verschiedene Werte annimmt. Für den Fall, daß das Testverfahren von vornherein festgelegt ist, geben Verff. Prinzipien für eine kostenmäßig günstigste Wahl des Abstandes m der Entscheidungspunkte und des Umfangs k der jeweils zu untersuchenden Stichprobe an.

Georg Friede.

Dynkin, E. B.: Über hinreichende und notwendige Statistiken für eine Familie von Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 75, 161—164 (1950) [Russisch].

$\chi_1(x)$ und $\chi_2(x)$ seien in einem Gebiet des R_n definiert und mögen Werte aus einem R_m annehmen. χ_2 heißt χ_1 untergeordnet, wenn aus $\chi_1(x') = \chi_1(x'')$ folgt $\chi_2(x') = \chi_2(x'')$ (aber nicht umgekehrt). Eine Schätzfunktion χ heißt notwendig für eine Klasse von Verteilungsfunktionen S in einem Intervall $A: a \leq x_i \leq b$ ($i = 1, \dots, n$; x_i Koordinaten von x), wenn χ auf A definiert ist und dort jeder erschöpfenden (hinreichenden) Schätzfunktion untergeordnet ist. Es werden eine Reihe von Sätzen über notwendige und erschöpfende Schätzfunktionen (ohne Beweis) formuliert: S sei eine von einem Parameter t abhängige Schar von Verteilungsfunktionen mit der Dichte $p(x, t)$, wobei x in dem endlichen oder unendlichen Intervall A variiert. p sei dort stückweise glatt, positiv, und t gehöre irgendeiner Menge T an. Für ein $t_0 \subset T$ sei $g_x(t) = \log p(x, t) - \log p(x, t_0)$. L sei der engste lineare Funktionenraum auf A definierter Funktionen, welcher die Konstante und für jedes $t \subset T$ $g_x(t)$ enthält. $1, \varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x)$ sei eine Basis von L , wobei auch $r = \infty$ zugelassen ist. Für irgendein $n \leq r$ ist jede erschöpfende Statistik für S trivial, d. h. von der Form $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Für $n > r$ sind $\chi_i(x) = \sum_{k=1}^n \varphi_i(x_k)$, $i = 1, \dots, r$, unabhängig und die Komponenten einer erschöpfenden und notwendigen Schätzfunktion für S auf A . Weitere Sätze über notwendige und hinreichende Bedingungen für endliche Dimension von L und im Zusammenhang damit für notwendige und erschöpfende Schätzfunktionen z. T. unter Heranziehung einer Klasse von Wahrscheinlichkeitsgesetzen, welche sich aus einem standardisierten Gesetz durch Nullpunktverschiebung und Maßstabsänderung ergeben. Einer von diesen steht im wesentlichen in der (nicht zitierten) Arbeit von Koopman (dies. Zbl. 14, 168). Schließlich werden Beispiele behandelt.

Leo Schmetterer.

Versicherungsmathematik. Finanzmathematik:

Zwinggi, E.: Beitrag zum Zinsfußproblem der Prämie. Experientia 5, 439—440 (1949).

Anknüpfend an das von Lotka entwickelte Verfahren zur Berechnung der

Vermehrungsrate der stabilen Bevölkerung wird die Prämie für eine gemischte Versicherung berechnet beim Übergang von einer Zinsintensität δ_0 zu $\delta = \delta_0 + r$. Es ergibt sich $P(\delta) = P(\delta_0) \exp(\alpha r + \beta r^2/2)$, wo α und β Konstanten sind, die sich aus den Momenten für δ_0 ergeben. Die Annäherung erweist sich bei $r \leq 1\%$ und der Versicherungsdauer $n \leq 40$, ausgehend von 3,5 v. H., als sehr gut; bei einer Verminderung des Rechnungszinsfußes der gleichen Größenordnung gilt $n \leq 30$. Das Verfahren kann auch auf andere Versicherungen angewendet werden.

Wilhelm Lorey.

Poudevigne, Jacques: *Physique actuarielle: Détermination électrique des annuités.* Bull. trimestr. Inst. Actuaire Français 60, 46—54 (1949).

Ausgehend von der Vorstellung „das Geld arbeitet, wenn das Kapital Zinsen bringt“, entwickelt Verf. zunächst den Gedanken, durch die Arbeitsleistung an einer schiefen Ebene den Barwert einer nachschüssigen Zeitrente darzustellen, und überträgt diesen auf eine Ablesung an einem Ampèremeter.

Wilhelm Lorey.

● **Tables d'intérêts et d'annuités éditées par le Crédit communal de Belgique.** Brüssel: 1950. 163 S.

Geometrie.

Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

● **Bieberbach, L.:** *Einführung in die analytische Geometrie.* 4. Neubearb. Aufl. Bielefeld: Verlag für Wissenschaft und Fachbuch G. m. b. H. 1950. 168 S. mit 43 Abb., DM 8,90.

Die vorliegende 4. Aufl. dieses Buches, dessen 1. Aufl. im Jahre 1930 erschienen ist, ist keine unveränderte Wiederholung der 3. Aufl., auch wenn das Programm des Verf. in seinen charakteristischen Zügen ungeändert geblieben ist. „Nur etwa ein Drittel des Textes wurde aus der 3. Auflage unverändert übernommen“, sagt Verf. im Vorwort; im Vergleich zu der 3. Aufl. sind die wichtigsten Neuerungen: eine neue Fassung der Determinantentheorie, die Behandlung der Inhaltslehre in der Ebene in einem eigenen Abschnitt, und ein neuer Paragraph über die Kreisgeometrie. Die höchst moderne Auffassung der analytischen Geometrie in Beziehung mit der Vektorrechnung und mit dem Matrizenkalkül, eine Auffassung, welche beim Leser verschiedene Kenntnisse des Gegenstandes vom elementaren Standpunkt aus voraussetzt, die größere Wichtigkeit, die den Methoden beigelegt wird, und alle anderen Merkmale, die das Buch schon in den vorigen Auflagen charakterisierten, bleiben hier, wie gesagt, ungeändert. Das Buch ist das erste einer Reihe von drei; die zwei anderen sind der projektiven Geometrie und der höheren Geometrie gewidmet.

E. G. Togliatti.

● **Schmidt, Hermann:** *Ausgewählte höhere Kurven.* Wiesbaden: Kesselringsche Verlagsbuchhandlung 1949. 255 S. Halbleinen DM 7,80.

Der kürzlich verstorbene Verf. gehörte als Oberschulrat einem Wiesbadener Erziehungsministerium an, das Schulreformbestrebungen mit Nachdruck betrieb. Das vorliegende Buch soll Stoff bieten, den mathematischen Unterricht an höheren Schulen zu beleben. Verf. wählte dazu ein reizvolles und unterrichtsnahes Gebiet. Er behandelt einige Kubiken, Quartiken, Zykloiden, Spiralen, Kettenlinien, Quadratrix. An jeder Kurve wird der Plan abgewickelt: Erzeugungsweisen, Auswertung von Gleichungen, Tangentenkonstruktionen, Längen und Inhalte, Beziehung zu „Unlösbaren Problemen“. Krümmungskreise sind fast durchweg gemieden, obgleich gerade sie dem Schüler die Kraft der Differentialrechnung eindrucksvoll vor Augen führen könnten. — Ohne Zweifel enthält das Buch eine Auswahl mit manchen hübschen Einzelzügen; in der Hand eines kritischen Lehrers, der seinen eigenen Kurs zu steuern weiß, wird es im Sinne der Absichten des Verf. wirken können. Der begabte Schüler aber, den der Verf. auch als seinen Leser erhofft, wird in eine wenig

lückliche Richtung abgedrängt. Die Darstellung ist umständlich, öfter in durchaus nicht einwandfreier Ausdrucksweise und mit unsachgemäß ausgeführten Figuren. Das Formale, im Rechnen und Konstruieren, ist überbetont, während ein Eingehen auf die Gedankenwelt der Mathematik, die sich doch in vieler Hinsicht an dem Gegenstande herausgebildet hat, vermißt werden muß (selbst in den Grenzen, die der inneren Schülerarbeitsgemeinschaft wohl geboten werden dürften). Die Absicht war gut; in der Durchführung bleibt dem Lehrer noch genug, sich selbst zu erweisen.

Egon Ullrich.

Nádeník, Zbyněk: Sur certaine explication des conditions pour que huit points d'une courbe du quatrième degré avec un point triple soient sur une conique. Časopis Mat. Fys., Praha 75, D 261—D 265 und französ. Zusammenfassg. D 265 (1950) [Tschechisch].

Pirko, Zdeněk: Les courbes anallagmatiques. Časopis Mat. Fys., Praha 75, D 266—D 276 und französ. Zusammenfassg. D 276 (1950) [Tschechisch].

Nous appellons anallagmatiques les courbes, ayant la propriété de se reproduire par l'inversion quadratique. Les plus simples de ces courbes sont la droite et la conique. Les coniques anallagmatiques font un réseau spécial. Toute courbe anallagmatique (droites et coniques exceptées) est l'enveloppe d'un système de coniques anallagmatiques. Toute conique enveloppée est bitangente à la courbe anallagmatique. (Autoreferat.)

Kadeřávek, František: Sur un groupe des surfaces, ayant les propriétés caractéristiques communes. Časopis Mat. Fys., Praha 75, D 277—D 282 und französ. Zusammenfassg. D 282 (1950) [Tschechisch].

On traite les surfaces formées par les courbes affines, situées dans les plans parallèles et contenant une courbe du deuxième ordre et deux droites parallèles entre eux et normales à une section de la courbe donnée. Les surfaces portent deux systèmes des courbes affines entre eux, long desquelles on peut construire les conoïdes, qui sont tangentes à la surface traitée. Une partie de cette surface est formée comme un coin, c'est pour cela, qu'on a donné à ces surfaces le nom: les conoïdes ou les surfaces sphénoïdales ($\acute{o}\sigma\phi\acute{\eta}\nu$ = le coin). Certaines de ces surfaces ont trouvées l'application dans les travaux du béton armé. (Autoreferat.)

Medek, Václav: Sur la cubique de Hesse du réseau de coniques. Časopis Mat. Fys., Praha 75, D 358—D 361 und französ. Zusammenfassg. D 361 (1950) [Tschechisch].

L'A. montre une construction géométrique de la cubique plane qui est le lieu de points singuliers des coniques d'un réseau. (Autoreferat.)

Schuster, Jan: Sur une transformation des coordonnées. Časopis Mat. Fys., Praha 75, D 361—D 375 und französ. Zusammenfassg. D 375 (1950) [Tschechisch].

Le but de ce travail est d'introduire dans l'espace à trois dimensions un moyen simple permettant de passer des coordonnées parallèles aux coordonnées tétramétriques et inversement. (Autoreferat.)

Piska, Rudolf: Sur le système spécial de coniques. Časopis Mat. Fys., Praha 75, D 376—D 384 und französ. Zusammenfassg. D 384 (1950) [Tschechisch].

Soient données dans le plan deux circonférences touchant l'une à l'autre. L'A. étudie le système de coniques qui touchent à chacune de ces circonférences en deux points distincts et en déduit quelques constructions, par exemple une construction très simple de la normale à une conique. (Autoreferat.)

Karamata, J.: Über die Anwendung der komplexen Zahlen in der Elementargeometrie. Bull. Soc. Math. Phys. Républ. popul. Macédoine 1, 55—74 und deutsche Zusammenfassg. 75—81 (1950) [Serbisch].

Da hier neben der Addition ausschließlich von der Produktbildung ($z_1|z_2$) = $x_1 y_2 - x_2 y_1$ zweier komplexer Zahlen $z_v = x_v + i y_v$ Gebrauch gemacht wird, stellen diese Betrachtungen (bis auf den Schluß) eigentlich mehr eine Anwendung der Vektoren als der komplexen Zahlen dar. Nach Angabe einiger bekannten Formeln über den Inhalt eines Dreiecks, von dem die Ecken oder die durch je zwei Punkte festgelegten Seitengeraden gegeben sind, wird ein einfacher Beweis des affinen Falls (paralleler Gegenseiten) des Satzes von Pappus-Pascal gegeben. Der Satz erweist sich dabei als eine Folge der Distributivität jenes Produkts. Mit seiner Hilfe ergibt sich dann der Sonderfall des Desarguesschen Satzes über perspektive

Dreiecke mit parallelen Seiten. Bemerkenswert ist, daß hier der Pappus-Pascalsche Satz nur zweimal herangezogen wird, während dies bei G. Hessenberg [Math. Ann. 61, 165 (1905)] dreimal geschieht. Zum Schluß zeigt Verf. noch, daß sich der projektive Fall des Satzes von Pappus auf analoge Art beweisen läßt. Er ersetzt hierzu das Produkt $(c|c')$ zweier durch die komplexen Zahlen c und c' dargestellter Strecken AB , $A'B'$ durch eine reelle Zahl $(AB, A'B')_h$, welche den Strecken h bezug auf eine feste Gerade h zugeordnet wird, die Eigenschaft der Distributivität besitzt und verschwindet, wenn die Verlängerungen der beiden Strecken einander auf h schneiden.

Erich Schönhardt

Šindelář, Karel: The real cyclic collineations. Časopis Mat. Fys., Praha 74 Nr. 4, 263—266 und tschechische Zusammenfassg. 266—267 (1950).

Algebraische Geometrie:

Bílek, J.: Sur une involution du degré 14 et sa dégénération. Časopis Mat. Fys., Praha 75, D 282—D 286 und französ. Zusammenfassg. D 287 (1950) [Tschechisch].

Nous pouvons obtenir cette involution en transformant l'involution de Geiser J_8 par une transformation quadratique T_2 . On peut construire cette involution à l'aide d'un réseau de quartiques elliptiques $S_4^2(A_1^2, A_2^2, A_3, \dots, A_8)$. Le réseau S_4^2 forme un complexe linéaire, qui est „composé“. Toutes les quartiques passant par un point P , passent aussi par un point P' . Le couple P, P' est un couple homologue dans notre involution. — Si un point principal du septième ordre et deux points du quatrième ordre sont situés sur une droite, l'ordre de l'involution est réduit d'une unité. Si deux points principaux du septième ordre et un point du quatrième ordre sont situés sur une droite, l'ordre de l'involution est réduite à l'involution de Geiser. Si deux points principaux du septième ordre et un point du premier ordre sont situés sur une droite, l'ordre de l'involution est réduit d'une unité. Si deux points principaux du quatrième ordre et un point du premier ordre sont situés sur une droite, l'ordre de l'involution est réduit de quatre unités.

(Autoreferat.)

Roselli, Alberto: Sulla topologia delle curve situate su un cono cubico. I. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 9, 233—238 (1950).

Verf. beweist, daß auf einer Kegelfläche dritter Ordnung mit einem Mantel (K_1) jeder paare Kurvenzug von jeder Erzeugenden in einer geraden Anzahl von reellen Punkten getroffen wird und jeder unpaare Kurvenzug in einer ungeraden Anzahl, daß ein paarer Kurvenzug jeden anderen Kurvenzug (sei er paar oder unpaar) in einer geraden Anzahl von reellen Punkten trifft, und daß zwei unpaare Kurvenzüge sich in einer ungeraden Anzahl von reellen Punkten schneiden. — Eine algebraische Raumkurve auf K_1 , ohne mehrfache Punkte, besitzt, wenn sie von gerader Ordnung ist, keinen unpaaren Zug, wenn sie dagegen von ungerader Ordnung ist, besitzt sie einen und nur einen.

M. Piazzolla-Beloch

Roselli, Alberto: Sulla topologia delle curve situate su un cono cubico. II. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 9, 324—326 (1950).

In dieser zweiten Mitteilung betrachtet Verf. eine Kegelfläche dritter Ordnung (K_2) mit zwei Mänteln und beweist, daß für die Kurvenzüge auf dem unpaaren Mantel dieselben Eigenschaften bestehen wie für solche auf Kegelflächen K_1 der ersten Mitteilung (s. vorsteh. Ref.), hingegen auf dem paaren Mantel die Kurvenzüge sich topologisch so verhalten wie die Kurvenzüge, welche auf einer Kegelfläche zweiter Ordnung liegen [vgl. M. Beloch, Atti R. Accad. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., V. S. 22, 60—67, 95—97 (1913)]. Eine algebraische Kurve auf K_2 ohne mehrfache Punkte besitzt nicht mehr als zwei unpaare Züge, wenn sie von gerader Ordnung ist (außer eventuellen paaren Zügen); dagegen einen und nur einen unpaaren Zug, wenn sie von ungerader Ordnung ist. — Verf. beweist, daß auf K_2 wirklich singularitätenfreie Kurven gerader Ordnung mit zwei unpaaren Zügen existieren.

M. Piazzolla-Beloch

Longhi, Ambrogio: I gruppi con elementi multipli distinti dalle cuspidi nelle serie algebriche sulle curve razionali cuspidate. *Comment. math. Helvetici* **24**, 196—203 (1950).

Extension à une courbe rationnelle dotée de cuspidés d'une formule de de Jonquières, donnant le nombre de groupes d'une série algébrique formée de groupes équivalents, qui possèdent des points de multiplicité donnée. — Ce nombre est établi par récurrence sur la dimension de la série, en utilisant la correspondance qui fait correspondre un point sur la courbe aux points appartenant aux groupes de la série passant par le premier et ayant au point considéré une multiplicité diminuée de 1.

B. d'Orgeval.

Godeaux, Lucien: Sur quelques surfaces algébriques de diviseur trois. *Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci.*, V. S. **36**, 803—808 (1950).

Si on considère dans S^r , une homographie H d'ordre 3 possédant trois axes ponctuels, il existe trois systèmes de variétés cubiques conservées par l'involution I_3 engendrée par H . En rapportant l'un de ces systèmes (V) aux hyperplans d'un espace linéaire de même dimension, on obtient facilement les équations de la variété image de I_3 . Si on considère une surface F intersection de $r-2$ variétés V , ne rencontrant pas les axes de H , cette surface possède une involution d'ordre 3 sans points unis dont l'image a le diviseur 3.

B. d'Orgeval.

Samuel, P.: Multiplicités d'intersection en géométrie algébrique. *Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. Nr. 24* (Algèbre et théorie des nombres, Paris 25. 9. — 1. 10. 1949), 123—124 (1950).

Verf. behandelt ähnlich wie in seinem etwas später in Lüttich gehaltenen Vortrag (dies. Zbl. **37**, 222) den Begriff der Schnittmultiplizität in der algebraischen Geometrie: es bedeutet q ein Primärideal, das zu dem (einzigen) maximalen Primideal p eines Stellenringes \mathfrak{o} gehört; $P_q(n)$ sei die Länge des \mathfrak{o} -Moduls \mathfrak{o}/q^n ; für große n ist $P_q(n)$ eine ganze rationale Funktion von n , deren erstes Glied die Gestalt $e(q) n^d/d!$ hat. Der Koeffizient $e(q)$ ist eine natürliche Zahl, welche nach der Definition des Verf. die Multiplizität des Primärideals q heißt. Verf. wendet im Anschluß an die Theorie von C. Chevalley und A. Weil seine Definition auf verschiedene Fälle von Schnittmannigfaltigkeiten und Untermannigfaltigkeiten an.

Wolfgang Gröbner.

Segre, Beniamino: Questions arithmétiques sur les variétés algébriques. *Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. Nr. 24* (Algèbre et théorie des nombres, Paris 25. 9. — 1. 10. 1949), 83—91 (1950).

Verf. gibt eine Übersicht der eigenen und fremden Arbeiten über arithmetische Probleme auf algebraischen Mannigfaltigkeiten mit einem ausführlichen, auf über 50 Jahre zurückreichenden Literaturverzeichnis. Verf. bespricht zuerst die Mannigfaltigkeiten von Severi-Brauer (vgl. Segre, dies. Zbl. **37**, 225), von denen er zeigt, daß sie sich im gegebenen Grundkörper Γ auf eine verallgemeinerte Veronesesche Mannigfaltigkeit birational ohne Ausnahme abbilden lassen und daß sie daher entweder gar keinen oder unendlich viele zu Γ gehörige Punkte enthalten. Insbesondere wird noch festgestellt, daß die Ermittlung eines Punktes auf einer derartigen V_3 durch Lösung einer algebraischen Gleichung vom Grade 24 (höchstens) über dem Grundkörper erfolgen kann. — Weitere Resultate folgen für unirationale und homaloide Mannigfaltigkeiten, wo Ergebnisse von U. Morin (dies. Zbl. **15**, 370; **19**, 231; **26**, 424) und A. Predonzan (dies. Zbl. **33**, 16) vorliegen. Es kann der Grad der Erweiterung K des Grundkörpers Γ angegeben werden, in welchem Punkte der Mannigfaltigkeit sicher ermittelt werden können. Hierher gehört auch die Aufgabe, eine algebraische Gleichung nach Tschirnhaus in eine solche zu transformieren, bei welcher eine gewisse Anzahl von Koeffizienten verschwinden. — In den Arbeiten des Verf. über Formen 3. und 4. Grades (dies. Zbl. **30**, 365; **34**, 86; **37**, 28) spielt die Betrachtung der auf der Mannigfaltigkeit

liegenden linearen Räume eine sehr nützliche Rolle. Arithmetische Probleme bietet auch die Theorie der Basis, etwa bei der Aufgabe, alle Kurven gegebenen Grades auf einer Fläche zu bestimmen.

Wolfgang Gröbner.

Segre, Beniamino: Sur un problème de M. Zariski. Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. Nr. 24 (Algèbre et théorie des nombres, Paris 25. 9. — 1. 10. 1949), 135—138 (1950).

Die hier behandelte Aufgabe lautet folgendermaßen: a) Sind zwei algebraische Kegel V_r, V'_r isomorph (d. h. birational äquivalent), sind es auch ihre hyperebenen Schnitte V_{r-1} und V'_{r-1} ? (Die umgekehrte Behauptung ist unmittelbar evident.) In einem engeren Sinne: b) Muß jeder Isomorphismus zwischen V_r, V'_r die geradlinigen Erzeugenden von V_r in diejenigen von V'_r verwandeln? Wenn b) bejahend beantwortet wird, so gilt dasselbe für a); nicht aber umgekehrt. Allgemeiner kann man, an Stelle eines Kegels V_r , eine V_r , Ort von ∞^{r-1} Geraden, oder noch allgemeiner eine V_r , Ort von ∞^{r-1} Kurven C eines Systems Σ , betrachten, so daß: 1. die allgemeine Kurve C von Σ rational ist; 2. durch jeden Punkt von V_r eine einzige Kurve C von Σ hindurchgeht; 3. auf jeder C ein Punkt rational gewählt werden kann. Diejenigen V_r , für welche die Antwort b) ein „nein“ ist, müssen dann wenigstens zwei Systeme $\Sigma, \bar{\Sigma}$ der oben genannten Art enthalten. Verf. unterscheidet dann Σ -Systempaare, die voneinander unabhängig sind, und solche, die voneinander abhängig und durch ein ∞^{r-s} -System von V_s zusammengesetzt sind; im Raume S_r z. B. bilden zwei Geradenbündel O, O' zwei voneinander abhängige Systeme, die durch die Ebenen durch O, O' zusammengesetzt sind. Die obige Unterscheidung stützt sich auf folgende Konstruktion: es seien W_1 eine Kurve von Σ ; W_2 der Ort der von den Punkten von W_1 ausgehenden Kurven von Σ ; W_3 der Ort der von den Punkten von W_2 ausgehenden Kurven von Σ ; usw.; es sei dann s ($2 \leq s \leq r$) die höchste Dimension der W_1, W_2, W_3, \dots ; ist $s = r$, so sind $\Sigma, \bar{\Sigma}$ unabhängig, sonst nicht. Verf. beweist dann, daß die einzigen V_2 und V_3 , die zwei voneinander unabhängige Systeme $\Sigma, \bar{\Sigma}$ enthalten, die rationalen V_2 und V_3 sind, zusammen mit gewissen V_3 , die ein Büschel rationaler Flächen enthalten. Es folgt daraus, daß die Frage b) für alle irrationalen Regelflächen und für alle V_3 , die kein Büschel rationaler Flächen enthalten, zu bejahen ist. Insbesondere ist auch a) zu bejahen für alle Kegel mit nur 2 oder 3 Dimensionen.

E. G. Togliatti.

Benedicty, Mario: La base sulla varietà di Segre e su varietà analoghe. Rend., Soc. Ital. Sci., Roma, III. S. 27, 233—243 (1949).

L'A. deduce proprietà più o meno note della base per le varietà di dimensione k ($1 \leq k \leq t-1$) subordinate alla varietà di Segre (reale o complessa) prodotto di k spazi lineari: $W_t = S_{d_1} \times S_{d_2} \times \dots \times S_{d_k}$ mediante la semplice considerazione di una „proiezione stereografica“ della W_t sopra uno S_t che generalizza quella ordinaria di una quadrica sopra un piano. Perciò egli tiene conto dell'immagine della base per le V_k di S_t in questa trasformazione birazionale. Lo stesso metodo serve a determinare l'ordine di W_t . Per questa via si ritrova un noto risultato di Severi (Ann. Mat. pura appl., Milano III. S. 24, 89—120 (1915); Introduzione alla geometria algebrica, Geometria numerativa, fasc. II, Roma 1949) secondo cui la varietà di Segre è il modello minimo che rappresenta senza eccezioni il prodotto di k varietà lineari. Si dimostra inoltre che $t!/d_1! d_2! \dots d_k!$ è pure „l'ordine“ minimo anche rispetto agli omeomorfismi. — Si ottengono infine proprietà analoghe relative alle potenze simmetriche di uno spazio lineare.

Federico Gaeta.

Fano, Gino: Chiarimenti su particolari superficie aventi tutti i generi uguali all'unità. Atti Accad. Sci. Torino, Cl. I 84, 94—96 (1950).

L'A. caratterizza le F^{10} di S_6 con tutti i generi uguali all'unità dotati di un punto doppio, la cui proiezione da esso sopra un generico S_5 sia una F^4 di Veronese doppia

secondo tipo delle anzidette F^{10} di S_6 nodate, trovate da P. Du Val: Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VI. S. 15, 276—279, 345—347 (1932); questo [bl. 4, 161], mediante le due proprietà seguenti: 1^a. La F^{10} possiede una rete di quintiche di genere due autoresidua rispetto al sistema delle sezioni iperpiane, con un punto base P . Proiettando da P sopra un generico S_5 si ottiene la F^4 doppiaoluta. 2^a. La sezione iperpiana generica è birazionalmente equivalente ad una quintica piana generale. — Si osserva poi che per $p > 23$ la sezione iperpiana generica di una F^{2p-2} di S_p con tutti i generi uguali ad uno è a moduli particolari.

Federico Gaeta.

Roth, Leonard: Sulle V_3 algebriche su cui l'aggiunzione si estingue. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis., mat. natur., VIII. S. 9, 246—250 (1950).

L'A. dimostra che le V_3 algebriche completamente regolari con numero base uguale ad uno, sulle quali l'aggiunzione si estingue si riducono a pochi tipi birazionalmente distinti effettivamente esistenti. Sopra una V_3 siffatta tutti i sistemi lineari completi sono multipli di un sistema lineare completo $|A|$ irriducibile, privo di punti base, non composto con un'involuzione di curve. Si dimostra che affinché sulla V_3 l'aggiunzione si estingua bisogna et basta che l'aggiunto $|A'|$ di $|A|$ sia nullo o virtuale. — Si accenna pure brevemente al problema analogo per le V_3 irregolari in cui i risultati diventano meno precisi.

Federico Gaeta.

Vektor- und Tensorrechnung. Kinematik:

● Ollendorf, F.: Die Welt der Vektoren. Einführung in die Theorie und Anwendung der Vektoren, Tensoren und Operatoren. Wien: Springer-Verlag 1950. VIII, 470 S. u. 68 Textabb., DM 37,50, geb. DM 40.—

Depuis longtemps déjà, le monde du physicien théoricien coïncide avec le „monde des vecteurs“ conçu dans le sens le plus large. Mais de plus en plus le technicien lui-même éprouve le besoin de s'initier aux méthodes de cet univers et d'y puiser des schèmes de pensée. C'est à ce double besoin que répond le présent livre. Sa principale originalité consiste dans l'ambition même de son programme qui, partant des notions les plus élémentaires sur les vecteurs, finit par recouvrir à la fois la géométrie des espaces de Riemann et les notions fondamentales relatives à l'espace de Hilbert. Cet intérêt pour les notions fonctionnelles et leurs applications à la mécanique quantique le distingue par exemple du livre de Léon Brillouin „les tenseurs en mécanique et en élasticité“ avec lequel il présente certains points communs. Chacun des chapitres comporte à la fois une partie théorique, parfois un peu rapide, et des applications à des domaines variés de la physique. Ce sont ces applications qui font la valeur du livre. — Les trois premiers chapitres sont relatifs au calcul vectoriel proprement dit, algèbre élémentaire des vecteurs de l'espace euclidien à trois dimensions, étude des champs de vecteurs, et selon la terminologie de l'A. „calcul vectoriel en coordonnées affines“ (le rapporteur aurait préféré un exposé net de la notion d'espace vectoriel, indépendamment de toute considération métrique). Les applications traitées concernent la mécanique des systèmes, l'hydrodynamique, les équations de Maxwell sous leur forme tridimensionnelle, la théorie des réseaux à trois dimensions en liaison avec la cristallographie. Les deux chapitres suivants sont consacrés au calcul tensoriel dans l'espace affine et dans l'espace euclidien. L'algèbre tensorielle est introduite, sans aucune tendance axiomatique, à partir des formules usuelles de changements de repère. L'analyse tensorielle, en coordonnées rectilignes obliques, est immédiatement orientée vers de nombreuses applications: élasticité, hydrodynamique, polarisation électrique, traitées brièvement, mais d'une manière excellente. — Le sixième chapitre, intitulé „l'espace de Minkowski“, comporte l'essentiel de la théorie de la relativité restreinte au points de vue cinématique, dynamique et électrodynamique. Il se complète par une étude très claire des éléments de la mécanique ondulatoire relativiste et comporte même une section relative à la théorie du méson. En une vingtaine de pages, le lecteur se trouve ainsi initié aux équations fondamentales de la théorie et peut ensuite aborder utilement les traités spécialisés. — Les septième et huitième chapitre sont relatifs respectivement aux espaces de Riemann et à l'espace de Hilbert. Le premier comporte l'analyse tensorielle riemannienne sous une forme à peu près classique et se complète par une introduction succincte à la théorie relativiste de la gravitation. Il est à noter que les symboles de Christoffel sont introduits par la considération du transport parallèle d'un vecteur sur une surface; peut-être l'A. aurait-il pu montrer que l'étude de l'espace euclidien en coordonnées curvilignes conduit déjà d'une manière nécessaire à ce formalisme. Les notions fondamentales concernant l'espace de Hilbert, les opérateurs linéaires fonctionnels et les équations intégrales sont introduites en une vingtaine de pages et immédiatement appliquées à la mécanique quantique. L'exposé est conçu naturellement pour l'utilisateur, non pour le mathématicien, et

un certain nombre de résultats énoncés d'une manière précise sont admis. — Au total, ce volume, dont la rédaction est fort claire, remplit bien le programme voulu par l'A. Il sera peut-être permis au rapporteur de manifester seulement deux regrets; l'un vise une séparation plus nette des parties affines et des parties métriques, qui s'enchevêtrent un peu au cours du livre, ce qui peut causer quelques difficultés pour le lecteur débutant. L'autre concerne l'absence de toute introduction au calcul extérieur. L'algèbre extérieure et le calcul différentiel extérieur, encore trop peu connus des utilisateurs, sont pourtant de merveilleux instruments qui participent directement au „monde des vecteurs“ et qui interviennent de la manière la plus simple dans bon nombre d'applications.

André Lichnerowicz.

● **Hofmann, August:** Einführung in die Vektorrechnung. München: R. Oldenbourg Verlag 1950, 111 S. brosch. DM 7.—.

Verf. gibt eine elementare Einführung in die Vektoralgebra, die nach den Worten des Verf. „ein ernsthafter Versuch sein soll, die mathematikbeflissene Jugend in das Rechnen mit Vektoren einzuführen“. Sie soll dem Interesse entgegenkommen, das heute schon weite Kreise des höheren Schulwesens an einer Einführung der Vektoralgebra im Unterricht der höheren Schule haben. Das Buch gliedert sich in 4 Teile: Vektorrechnung auf der Geraden, Vektorrechnung in der Ebene, Vektoren im Raume und Aufgaben mit Lösungen. — Im einzelnen wäre folgendes zu bemerken: Grundsätzlich und absichtlich ist von einer Verwendung der Trigonometrie abgesehen worden, was allerdings die Zusammenhänge oft nicht ganz klärt. Bei der Vektorrechnung in der Ebene hält es der Verf. für notwendig das „Flachprodukt“ $\alpha \wedge \nu$ einzuführen, und es wird nur sehr kurz darauf hingewiesen, daß im Raum an Stelle des Flachprodukts das Vektorprodukt tritt. Als Kehrvektor ν^{-1} eines Vektors ν wird der Vektor mit derselben Richtung aber dem reziproken Betrag eingeführt. Dieser neue Begriff scheint in mehrfacher Hinsicht nicht sehr geschickt gewählt, da er einmal auf die Möglichkeit einer Vektordivision hinzuweisen scheint und andererseits der Begriff „reziproke Vektoren“ bereits in anderer Bedeutung verwendet wird. Sprachlich werden die aus dem Lateinischen stammenden Begriffe oft verdeutscht, was aber nicht immer zu flüssigen Wortbildungen führt (Verkettregel, Zergliederregel). Auch sonst werden umständliche Wortgebilde geprägt (Viervektorpunktprodukt, wir kreuzmultiplizieren), und sprachliche Unebenheiten sind zu beobachten (eine beliebige Quere zweier Windschiefen). Zahlreiche Beispiele behandeln nette Aufgaben der elementaren Geometrie, die allerdings nicht bis zum numerischen Ergebnis durchgeführt werden.

Rudolf Ludwig.

● **Groenman, Jakob Tjakko:** Behandlung der Koppelkurve mit Hilfe der isotropen Koordinaten. (Diss.) Delft: Waltman 1950. 103 S. und engl. Zusammenfassg. S. 104. [Holländisch].

Die Verwendung isotroper Koordinaten $x = X + iY$, $y = X - iY$ zur Untersuchung der ebenen Koppelkurve (courbe du trois-barres, three-bar-curve) wurde zuerst von R. Bricard gegeben (Leçons de cinématique II, Paris (1926) und führte im besonderen A. Haarblicher zu neuen Ergebnissen [J. École polytech. II. S. 31, 13—40 (1933); dies. Zbl. 8, 270]. Verf. knüpft an Haarblicher an und behandelt in der Hauptsache Resultate, die nach 1920 gefunden wurden, wovon eine Liste des betreffenden Schrifttums gegeben wird. Einzelne besondere Fälle, wie z. B. die Koppelkurven mit zwei Spitzen, führen zu neuen Eigenschaften, die ausführlich besprochen werden.

R. W. Weitzenböck.

Schmid, W.: Über die mehrfache Erzeugung von Koppelkurven. Z. angew. Math. Mech. 30, 330—333 (1950).

Nach einem einfachen Beweis der Robertsschen Satzes über die dreifache Erzeugung der Koppelkurve eines Gelenkvierecks mit Hilfe komplexer Zahlen wird die Aussage dieses Satzes an Sonderformen des Gelenkvierecks geprüft. Es zeigt sich, daß man bei den aus der Kreuzschleifenkette abgeleiteten Getrieben die Möglichkeiten der Erzeugung einer Bahnkurve nicht mehr einfach durch einen Grenzübergang aus dem Robertsschen Satz gewinnen kann. So können die Koppelkurven eines Kreuzschleifen- und Kreuzschiebergetriebes auf ∞^2 Arten erzeugt werden.

Bekir Dizioglu.

Schmid, W.: Über die Koppelkurve des Schubkurbelgetriebes. Z. angew. Math. Mech. 30, 388—390 (1950).

Verf. leitet einige für die Getriebesynthese wichtige Eigenschaften der Koppelkurve eines allgemeinen Schubkurbelgetriebes ab. Diese Koppelkurve ist eine oskulare Kurve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten D_1, D_2 auf einer bestimmten Geraden g durch den festen Kurbeldrehpunkt F_1 . — Diese Eigenschaften genügen jedoch noch nicht zur Kennzeichnung dieser Koppelkurven unter den Kurven vierter Ordnung. Da diese Koppelkurve unendlich ferne Punkte auch außerhalb der imaginären Kreispunkte besitzt, bekommt man einen reellen Schnittpunkt G_1 der beiden nicht isotropen Asymptoten. G_1 liegt auf der Geraden g , und die Punktepaare D_1, D_2 ; F_1, G_1 besitzen denselben Mittelpunkt. — Betrachtet man die eine Koppelkurve erzeugenden beiden Schubkurbelgetriebe, so beweist Verf., daß die Gerade, die den Schnittpunkt der Kreuzkopfbahnen dieser beiden Getriebe mit dem gemeinsamen festen Kurbeldrehpunkt verbindet, senkrecht zur Verbindungsgeraden der Doppelpunkte der Koppelkurve steht. Bekir Dizioğlu.

Hain, K.: Die zeichnerische Bestimmung der Schleppkurven. Ingenieur-Arch., Berlin 18, 302—309 (1950).

In der Fahrzeugtechnik und bei den landwirtschaftlichen Maschinen und Geräten ist die Form der Schleppkurve für den Lauf des Anhängers von Wichtigkeit. Es ist deshalb notwendig, einfache und genügend genaue Methoden anzugeben, mit deren Hilfe diese Kurven in Abhängigkeit von allen Bestimmungsgrößen dargestellt werden können. Verf. gelingt es mittels kinematischer Betrachtungen, graphisch diese Aufgabe zu lösen. — Es werden bestimmt die Schleppkurven des einfach geführten Rades, der Koppelenkung, der Achsschenkelenkung. Im Falle der Achsschenkelenkung wird die Bestimmung der augenblicklichen Drehpole mit Hilfe eines Ersatzgetriebes erfolgreich erledigt. Mit solchen Ersatzgetrieben können auch in ähnlicher Weise andere Lenkanordnungen untersucht werden. Bekir Dizioğlu.

Differentialgeometrie in euklidischen Räumen:

Haantjes, J.: Elementares vom höheren Standpunkt aus: Krümmung. Math. Centrum, Amsterdam, Rapport ZW 1950 — 007, 4 S. (1950) [Holländisch].

Eine Plauderei über die verschiedenen Definitionen der Krümmung einer Kurve der Fläche und ihre Verallgemeinerungsfähigkeit auf Riemannsche, metrische, affine Räume. Gerrit Bol.

Volta, Vittorio Dalla: Sull'isometria di calotte superficiali. Rend. Mat. sue. Appl., Univ. Roma Ist. naz. alta Mat., V. S. 8, 211—227 (1949).

Vgl. Verf., dies. Zbl. 31, 412, und E. Bompiani, dies. Zbl. 31, 265. Verf. zeigt hier auch für beliebiges $h \geq 3$: Zwei Flächenelemente h -ter Ordnung des euklidischen Raumes sind dann und nur dann in h -ter Ordnung aufeinander abbildbar, wenn sie sich so aufeinander beziehen lassen, daß in den zugehörigen Punkten die Gaußschen Krümmungen und ihre Ableitungen bis zur $(h-3)$ -ten Ordnung einschließlich übereinstimmen. Diese Bedingungen hängen nur von den Flächenelementen $(h-1)$ -ter Ordnung ab! Gerrit Bol.

Schneidt, Max: Über eine spezielle Form der Differentialgleichung aller Flächen eines gegebenen Linienelements. Arch. Math., Karlsruhe 2, 367—374 (1950).

Verf. behandelt die Frage von Gauß und Bour nach allen Flächen mit gegebenem Linienelement unter Verwendung komplexer Hilfsgrößen und der zugehörigen Differentialgleichungen. — Erst einmal werden die sphärischen Bilder der Tangenten auf Minimalgerade bezogen, daraus wird eine Teilung des reellen Winkels ω und dessen Darstellung als Differenz zweier komplexer Winkel α und β abgeleitet. Nun werden zwei komplexe Parameter ρ und σ definiert und für letzteren zwei Differentialgleichungen aufgestellt. Abwickelbare Flächen sind durch

die Abhängigkeit von ρ und σ gekennzeichnet. Die Elimination von σ führt schließlich auf eine Differentialgleichung, die für alle Flächen des gegebenen Linienelementes die Teilung des Netzwinkels $\omega = \alpha - \beta$ vorschreibt. Ein Lösungspaar α, β führt durch Quadraturen auf eine Fläche selbst. — Die allgemeine Differentialgleichung versagt für eine auch schon von Goursat [Amer. J. Math. 14, 1—8 (1892)] betrachtete Flächenklasse, die gesondert behandelt werden muß. Schließlich werden noch weitere spezielle Flächengruppen betrachtet und auch die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung berechnet.

Hans R. Müller.

Pogorelov, A. V.: Zu Weyls Beweis des Satzes über die Existenz einer geschlossenen, analytischen, konvexen Fläche, die eine auf der Sphäre gegebene analytische Metrik mit positiver Krümmung realisiert. Uspechi mat. Nauk 4, Nr. 4 (32), 183—186 (1949) [Russisch].

Von H. Weyl [Vjschr. naturf. Ges. Zürich 61, 40—72 (1916)] und H. Lewy [Trans. Amer. math. Soc. 37, 417—434 (1935); dies. Zbl. 11, 350] ist der Satz über die Bestimmung einer konvexen analytischen Fläche durch ihr Bogenelement bewiesen worden. Verf. gibt in der vorliegenden Arbeit für einen wesentlichen Teil des Beweises eine vereinfachte Darstellung. Die erforderlichen Abschätzungen für die Ableitungen des Radiusvektors $r(u, v)$ der Fläche werden aus einer Abschätzung für die Krümmungen der Normalschnitte erhalten, die nur von der Metrik abhängt.

Willi Rinow.

Verbickij, L. L.: Zur metrischen Differentialgeometrie der Hyperflächen zweiter Ordnung. Trudy Sem. vektor. tenzor. Analizu, Moskva-Leningrad 7, 319—340 (1949) [Russisch].

L'A. établit cinq théorèmes caractérisant les hyperquadriques de l'espace euclidien E_n à n dimensions. 1° Si une hypersurface du second degré a des lignes de courbure bien définies, il existe des surfaces à $n - 2$ dimensions qui leur sont orthogonales: ce sont les surfaces de niveau de la fonction σ^{n+1}/k , où σ est la courbure principale correspondante et où k est égal au produit de toutes les courbures principales. — 2° Réciproquement, une hypersurface de E_n sur laquelle le quotient de la puissance n^e de chacune des courbures principales par le produit des courbures principales restantes reste constant sur des surfaces à $n - 2$ dimensions orthogonales à la famille correspondante de lignes de courbure, est une hyperquadrique. — 3° Le long d'une ligne de courbure d'une hyperquadrique, la courbure principale correspondante est proportionnelle au cube de chacune des courbures principales restantes. — 4° Toute surface telle que, le long d'une de ses lignes de courbure, la courbure principale correspondante soit proportionnelle au cube de chacune des courbures principales restantes, est une hyperquadrique. — 5° Sur une hyperquadrique de E_n , le rapport de la puissance n^e de la courbure d'une ligne géodésique au cube de la courbure totale de la surface est constant pour une ligne géodésique donnée. — Le ds^2 de l'hyperquadrique $x_1^2/b_1 + x_2^2/b_2 + \dots + x_n^2/b_n = 1$ a la forme

$$ds^2 = - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{v_i \Pi'_i(v_i - v_\lambda) dv_i^2}{4(v_i - b_1)(v_i - b_2) \dots (v_i - b_n)}$$

pendant que la surface a la représentation paramétrique

$$x_i^2 = \frac{b_i(v_1 - b_i)(v_2 - b_i) \dots (v_{n-1} - b_i)}{(b_1 - b_i) \dots (b_{i-1} - b_i)(b_{i+1} - b_i) \dots (b_n - b_i)}.$$

B. Gambier.

Löbell, Frank: Beziehungen zwischen geodätischen Ableitungen von Krümmungsgrößen. S.-B. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1949, 37—40 (1950).

Es werden auf einer Fläche „Linienelementfunktionen“ $f(u, v; dv/du)$ betrachtet die von einem Flächenpunkt u, v und von einer Richtung $dv:du$ durch ihn abhängen. Davon wird eine „geodätische Ableitung“ $\delta f:ds$ längs einer Flächenkurve $u(s), v(s)$

erklärt, wobei die Richtung $dv:du$ längs dieser Kurve im Sinne von Levi-Civita übertragen wird. Es wird mit g der „geodätische Krümmungsvektor“ in einer Tangentenrichtung t eingeführt und mit g^* der entsprechende Vektor in der Tangentenrichtung t^* rechtwinklig zu t bezeichnet, und es werden die Vektoren

$$g = \frac{\delta g}{ds}, \quad \bar{g} = \frac{\delta g^*}{ds}, \quad g^* = \frac{\delta g^*}{ds^*}, \quad \bar{g}^* = -\frac{\delta g}{ds^*}$$

mit ihren Beziehungen untersucht.

Wilhelm Blaschke.

Bell, P. O.: Hypergeodesie polygons whose ratio of angular excess to integral curvature is constant. Univ. nac. Tucumán, Fac. Ci. exact. Tecnol., Rev., Ser. A 7, 141—156 (1950).

Unter bekannten Voraussetzungen gilt auf einer Fläche S des euklidischen Raumes die Integralformel von Gauß-Bonnet

$$\iint K dw + \oint \gamma ds = \varepsilon,$$

wobei ist K das Gausßsche Krümmungsmaß, γ die geodätische Krümmung der Randkurve und ε der Exzeß des Flächenstückes. Verf. untersucht die Kurven der Fläche, für die als Randkurven eines Bereiches

$$\varepsilon = k \iint K d\omega \quad (k = \text{const.})$$

ist. Um zu den Differentialgleichungen dieser Kurven zu gelangen, schreibt Verf. das Flächenintegral auf Grund des Theorema Egregium als Randintegral und setzt die Integranden gleich. Dabei übersieht Verf., daß solche Integranden nur bis auf ein vollständiges Differential bestimmt sind. Dadurch gelangt er nur zu einer ganz speziellen Klasse der von ihm definierten Kurven, die an die zufällige Wahl der Parameterlinien $u = \text{const.}$ gebunden ist. Für $k = 0$ ergeben sich die Isogonal-Trajektorien der Kurven $u = \text{const.}$ Es handelt sich somit um Kurvensysteme, die mit den Parameterlinien $u = \text{const.}$ verkoppelt sind. Die vom Verf. gewählte Bezeichnung „Hypergeodätische Kurven“ wäre wohl erst gerechtfertigt, wenn dann die Differentialgleichungen biegungsvariant verankert würden. — Verf. beweist verschiedene Eigenschaften der Kurven und gibt eine elementare Konstruktion für die geodätische Krümmung der Kurven $k = 0$. — Im letzten Abschnitt wird eine Verallgemeinerung auf einen Riemannschen V_n angedeutet; allerdings setzt Verf. stillschweigend voraus, daß die V_n ein n -fach orthogonales System von Hyperflächen besitzt, die als Parameterflächen gewählt werden.

W. Haack.

Bouchout, V. van: Ein Satz über Isothermen und isotherme Parameter. Simon Stevin, wiss.-natuurk. Tijdschr. 27, 133—135 (1950) [Holländisch].

Eine Kurvenschar auf einer Fläche heiße isotherm, wenn sie mit ihren orthogonalen Trajektorien ein isothermes Netz bildet. Dann ist jede Schar von isogonalen Trajektorien einer isothermen Schar wiederum isotherm. Der Satz ist nicht neu (Beltrami, Gauß?), der Beweis läßt sich einfacher führen.

Gerrit Bol.

Grove, V. G.: A note on isothermal nets. Proc. Amer. math. Soc. 1, 595—599 (1950).

Der Vektor $x(u, v)$ (in homogenen, projektiven Koordinaten) beschreibe eine Fläche F , auf der u, v geeignet normierte Asymptotenlinien-Parameter sind. Durch Umnormierung der homogenen Koordinaten x in Φx ändert sich F nicht. Verbindet man den Punkt $r = \frac{1}{\Phi} \frac{\partial}{\partial u} (\Phi x)$ der einen Haupttangente mit dem Punkt $s = \frac{1}{\Phi} \frac{\partial}{\partial v} (\Phi x)$ der anderen Haupttangente, so entsteht eine Zentralkongruenz der Fläche F [P. O. Bell, Trans. Amer. math. Soc. 46, 389—409 (1939); dies. Zbl. 22, 167]. Verf. betrachtet eine Kurvenschar $M du + N dv = 0$ auf F . Ist y ein Punkt auf der Tangente der durch x gehenden Kurve der Schar, der nicht auf der Geraden r, s liegt, so läßt sich y von r und s je auf die andere Haupttangente projizieren. Man erhält zwei Punkte p, q . Die Tangenten $(p p_u)$ und $(q q_v)$ projiziert man von $(\Phi x)_u v$

auf die Tangentenebene von F . Die Projektionen schneiden die Haupttangente in den Punkten l, m . Wenn die Verbindungsgeraden (l, m) eine Zentralkongruenz erzeugen, dann gehört die Kurvenschar einem isotherm-konjugierten Netz an. — Verf. gibt im zweiten Teil eine analoge Kennzeichnung der isotherm-orthogonalen Netze der metrischen Geometrie, indem er von einem orthogonalen Parameternetz ausgeht. *W. Haack.*

Simonart, Fernand: Sur les configurations hexagonales. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. **36**, 454—460 (1950).

Für dreimal stetig differenzierbare Sechseckgewebe wird erneut gezeigt, daß sie auf drei Büschel paralleler Geraden topologisch abbildbar sind. Bei Nichtsechseckgeweben wird für die Schließungslücke der Sechsecke ein einfacher Ausdruck angegeben. Ein 3-Gewebe auf einer Fläche, bei dem die Winkel der Gewebekurven längs jeder Kurve der ersten Schar konstant sind, ist dann und nur dann ein Sechseckgewebe, wenn diese Schar einem isothermen Netz angehört. *Gerrit Bol.*

Lalan, V.: Sur l'emploi d'un repère canonique dans l'étude des réseaux conjugués. Bull. Soc. math. France **78**, 162—184 (1950).

Man möge eine Fläche (M) positiven Krümmungsmaßes im euklidischen Raum beschreiben, dann kann man ein solches begleitendes Dreibein e_1, e_2, e_3 (e_3 = Einheitsvektor der Flächennormalen) wählen, daß die zweite Grundform die Gestalt $\omega^1 \bar{\omega}^1 + \omega^2 \bar{\omega}^2$ annimmt, wenn die infinitesimale Verschiebung $d\mathcal{M} = \omega^1 e_1 + \bar{\omega}^2 e_2$ ist [E. Cartan, Bull. Sci. math., Paris **67**, 8—32 (1943); dies. Zbl. **27**, 425]. Verf. spricht von dem kanonischen Dreibein des konjugierten Netzes $\bar{\omega}^1 = 0, \bar{\omega}^2 = 0$. Wenn auf einer Fläche (M) mit dem Bogenelement $ds^2 = g_{ik} \omega^i \omega^k$ durch $\omega^1 = 0, \omega^2 = 0$ ein konjugiertes Netz gegeben ist, so lautet die zweite Grundform $a \omega^1 \omega^1 + c \omega^2 \omega^2$. Durch Normierung $\omega^1 = \sqrt{a} \omega^1, \omega^2 = \sqrt{c} \omega^2$ ergibt sich die kanonische Normierung der Formen und daraus das kanonische Dreibein. Verf. beweist die Sätze: Sind ds^2 und ein konjugiertes Netz einer Fläche gegeben, so läßt sich durch endliche Operationen mindestens ein kanonisches Dreibein bestimmen. In besonderen Fällen kann es zwei kanonische Dreibeine geben; dann gehört (M) zu einem Paar isometrischer Flächen mit entsprechendem konjugierten Netz. Schließlich kann es eine einparametrische Schar von kanonischen Dreibeinen geben. Dann gelangt man zu einer Schar von Biegungsflächen mit permanentem konjugierten Netz. Mit solchen Biegungsflächen hat sich schon A. Demoulin beschäftigt [C. r. Acad. Sci., Paris **133**, 265 (1901)]. Die Bestimmung der Flächen führt auf eine partielle Differentialgleichung 4. Ordnung für eine Hilfsfunktion Q . Verf. stellt diese Demoulin'sche Differentialgleichung auf und gibt einige partikuläre Lösungen an. *W. Haack.*

Sauer, Robert: Infinitesimale Verbiegung der Flächen, deren Asymptotenlinien ein Quasi-Rückungsnetz bilden. S.-B. math. naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München **1949**, 1—12 (1950).

Deutet man ein beliebiges gegebenes Netz von Schiebkurven in der Ebene als Projektion der Asymptotenlinien einer Fläche S , so ist S bis auf Affinitäten bestimmt. Die Koordinaten von S lassen sich durch Quadraturen ermitteln. Die infinitesimalen Verbiegungen der Fläche S lassen sich in geschlossener Form durch Quadraturen darstellen. Ist \mathfrak{x} die Ausgangsfläche, $\mathfrak{x} + \varepsilon \mathfrak{x}$ die infinitesimal verbogene Fläche, so läßt sich die Verbiegung durch den Drehriß (Sauer, Projektive Liniengeometrie, Berlin 1937; dies. Zbl. **16**, 218) mittels $d\mathfrak{x} = \eta \times d\mathfrak{x}$ beschreiben; dabei entspricht in der Projektion dem Netz der Schiebkurven von \mathfrak{x} ein Netz gerader Linien von η . Die Arbeit schließt mit Hinweisen auf die Verbiegung der Flächen zweiter Ordnung, ferner auf Beziehungen zur Theorie der Gasströmung. *W. Haack.*

Hu, Chin-Hsun: On the correspondence of geodesic circles of two surfaces. Sci. Record, Acad. Sinica **3**, 167—175 (1950).

Im Anschluß an eine Arbeit des Ref. [Math. Z. **27**, 134—137 (1928)] zeigt Verf.,

laß sich jede Fläche konstanten Krümmungsmaßes so in die Ebene abbilden läßt, laß die geodätischen (Krümmungs-) Kreise der Fläche in die Kreise der Ebene übergehen. Zwei Flächen S und S' sind aufeinander abbildbar mit Erhaltung der geodätischen Kreise, wenn das Bogenelement die Form hat:

$$ds^2 = \Phi' e^{-\Phi} du dv, \quad ds'^2 = \Phi' e^{+\Phi} du dv.$$

Φ ist eine willkürliche Funktion von $u \cdot v$; die Abbildungen sind konform.

W. Haack.

Finikov, S. P.: Über stratifizierbare Paare von Kongruenzen, die einer isotropen Kongruenz zugeordnet werden können. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 73, 899—900 (1950) [Russisch].

Die Lote entsprechender Strahlen zweier stratifizierbarer Kongruenzen mögen eine isotrope Kongruenz bilden. Dann sind korrespondierende Strahlen des Paares entweder orthogonal, oder der Mittelpunkt der isotropen Kongruenz halbiert die Strecke der beiden Lotfußpunkte. Im zweiten Fall existiert eine einparametrische Schar von stratifizierbaren Kongruenzen. Alle Strahlen dieser Schar, die den gleichen Strahl A der isotropen Kongruenz treffen, erzeugen ein Zylindroid, dessen Achse der Strahl A ist. Jedes solche stratifizierbare Kongruenzenpaar ist somit in einer Bachvalovschen Konfiguration enthalten (vgl. dies. Zbl. 22, 262).

J. Nitsche-W. Haack.

Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

Sangermano, Cosimo: Sulle trasformazioni puntuali fra due spazi ordinari in una coppia a jacobiano nullo, di caratteristica zero. Riv. Mat. Univ. Parma 1, 375—382 (1950).

L'A. dimostra che, in una trasformazione puntuale fra due spazi proiettivi ordinari, la determinazione di riferimenti proiettivi intrinseci relativi a coppie di punti corrispondenti a Jacobiano nullo di caratteristica zero dipende dagli intorno fino al 4° ordine di detti punti. La considerazione di enti geometrici (cono jacobiano) legati ai soli intorno del 2° ordine conduce però già alla scelta di riferimenti metrici intrinseci.

Piero Buzano.

Calapso, Renato: Invarianti di una superficie rispetto ad una trasformazione asintotica. Mat., Catania 5, 98—102 (1950).

Il punto $x(u, v)$ descriva una superficie S riferita alle asintotiche e il punto $x + h x_u + k x_v$ descriva una trasformata asintotica di S . L'A. chiama invarianti di S per trasformazione asintotica quelle espressioni formate coi quattro fondamentali invarianti proiettivi di S e col rapporto h/k che risultino uguali alle corrispondenti espressioni relative alla superficie trasformata. Prova l'esistenza di quattro invarianti siffatti determinandone le effettive espressioni.

Piero Buzano.

Arghiriade, E.: Sur le point principal des courbes tracées sur une surface. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII S. 6, 189—194 (1949).

Sopra una superficie S dello spazio ordinario si considerano due curve C e C' uscenti da uno stesso punto P ed aventi in P la stessa tangente t ma piani osculatori diversi (t si suppone diversa dalle tangenti asintotiche di S). Il luogo dei punti O dello spazio per cui i coni proiettanti da O le curve C e C' hanno lungo la generatrice OP un contatto del 2° ordine è il piano tangente in P a S (piano principale di Halphen relativo a C, C' in P). Il luogo dei punti O per cui i coni relativi hanno lungo OP un contatto del 3° ordine è la retta coniugata di t (retta principale di Bompiani). L'A. considera il punto O (punto principale) per cui i coni relativi hanno lungo OP un contatto del 4° ordine e dimostra che: il punto principale in P di C, C' è pure il punto principale in P delle curve sezioni di S coi piani osculatori in P a C, C' . E inoltre: Se N, N' sono i trasformati, nella corrispondenza di Segre, dei piani osculatori in P a C, C' , il punto principale di C, C' è il quarto armonico di

P rispetto a N, N' . L'A. ricerca infine le curve per le quali i coni che le proiettano dal loro punto principale hanno un contatto del 5° ordine pervenendo ai seguenti risultati (che porgono una nuova proprietà del cono di Segre): Considerata una retta t tangente in un punto P alla superficie S , siano π_1, π_2 due piani passanti per t e che separano armonicamente il piano tangente in P a S e il piano per t tangente al cono di Segre. Le sezioni di π_1, π_2 con S sono proiettate dal loro punto principale secondo coni che hanno appunto un contatto del 5° ordine. E inversamente: Se due curve piane appartenenti ad una superficie S hanno in P la stessa tangente t (e piani osculatori diversi) e sono proiettate dal loro punto principale secondo coni aventi un contatto del 5° ordine, allora i piani delle due curve sono separati armonicamente dal piano tangente a S e dal piano tangente per t al cono di Segre. *Mario Villa.*

Backes, F.: Sur un certain couple de surfaces projectivement applicables. Acad. Belgique, Cl. Sci., Mém., Coll. 8°, II. S. 24, Nr. 9, 28 S. (1950).

Ausführliche Darstellung einer früheren Mitteilung (dies. Zbl. 33, 395).

W. Haack.

Bell, P. O.: A theorem of Cartan. Duke math. J. 17, 453—455 (1950).

Verf. gibt einen elementaren Beweis für einen Satz von E. Cartan: Im n -dimensionalen projektiven Raum ($n \geq 3$) ist eine nicht-integrable Pfaffsche Form ω gegeben. Durch $\omega = 0$ wird jedem Punkt M ein Hyperebenenelement P zugeordnet. Wenn jede Kurve, deren Linienelemente die Gleichung $\omega = 0$ erfüllen, die entsprechenden Hyperelemente von zweiter Ordnung berührt (C -Kurve), so ist die gegebene Zuordnung eine Nullverwandschaft in bezug auf einen festen linearen Komplex [Ann. Sci. École norm. Sup. 62, 205—231 (1945)]. Da jede Gerade einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt, schließt Verf., daß alle mit (M, P) koinzidenten Geraden C -Kurven sind, und gelangt sofort zu Cartans Ergebnis.

W. Haack.

Gejde'Iman, R. M.: Über Kreiskongruenzen, die in Kanallflächen zerlegbar sind. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 66, 145—147 (1949) [Russisch].

Verf. untersucht eine Kreiskongruenz mittels Möbiusscher Kugelgeometrie. Zwei Brennpunkte und drei orthogonale Kugeln bilden ein begleitendes Bezugssystem, dessen infinitesimale Verschiebung auf ein vollständiges System Pfaffscher Formen führt. Die Bedingung dafür, daß das Kreissystem aus zwei Scharen von Kanallflächen besteht, läßt sich als involutorisches System Pfaffscher Formen schreiben, dessen Lösung zwei willkürliche Funktionen zweier Variabler enthält. Nach dieser Andeutung des formalen Aufbaus der Differentialgeometrie der Kreissysteme beschränkt sich Verf. auf die Zusammenstellung einiger geometrischer Eigenschaften.

W. Haack.

Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Tonolo, Angelo: Sopra un sistema di equazioni differenziali relativo ai moti rigidi delle varietà riemanniane a tre dimensioni a curvatura costante. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 19, 250—272 (1950).

Ist v^* Translationsvektor einer starren Bewegung in $S_3 (= V_3$ konstanter Krümmung), so gelten folgende von Ricci herrührende Gleichungen [Mem. Soc. Ital. Sci., III. S. 12, 69—92 (1899)]

$$(1) \quad \nabla_\mu v_\lambda = 2 i_{\mu\lambda\kappa} u^\kappa; \quad (2) \quad \nabla_\mu u_\lambda = 2 k i_{\mu\lambda\kappa} v^\kappa,$$

wo u^κ der Rotationsvektor und k (konstant und $\neq 0$) die skalare Krümmung ist. (2) ist die Integrabilitätsbedingung von (1). Es werden folgende Sätze abgeleitet: 1. Der Rotationsvektor einer starren Bewegung ist Translationsvektor einer anderen starren Bewegung. 2. Die Länge von v^* ist längs einer Trajektorie konstant. 3. v^* und u^κ haben dann und nur dann dieselbe Richtung, wenn die Trajektorien geodätisch sind. 4. Starre Bewegungen mit geodätischen Trajektorien gibt es nur für $k > 0$. 5. Die Trajektorien sind dann und nur dann geodätisch, wenn die starre

Bewegung eine reine Translation ist, d. h. wenn die Länge von v^α überall dieselbe ist. 6. Erste Integrale von (1) sind $u_\lambda v^\lambda = \text{konst.}$ und $g^{\mu\lambda} (k v_\mu v_\lambda + u_\mu u_\lambda) = \text{konst.}$ 7. Die Kongruenz der Trajektorien ist dann und nur dann V_2 -normal, wenn $u_\lambda v^\lambda = 0$. — Diese sehr hübschen Resultate hätten bei Verwendung moderner Methoden in wenigen Zeilen abgeleitet werden können.

J. A. Schouten.

Mira Fernandes, A. de: Le geodetiche degli spazi unitarii. Univ. Lisboa, Rev. Fac. Ci., II. S. A 1, 173—186 (1950).

Eine $2n$ -dimensionale reelle Mannigfaltigkeit X_{2n} , deren Punkte P auf die Koordinaten $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ bezogen sind, läßt sich durch Einführung der komplexen Koordinaten $\xi^\alpha = x^\alpha + i y^\alpha, \bar{\xi}^\alpha = x^\alpha - i y^\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, n; i = \sqrt{-1}$, in oft vereinfachter Weise behandeln, indem mit den ξ^α von vornherein auch die Kenntnis der konjugiert-komplexen $\bar{\xi}^\alpha$ gegeben ist. Man kann dann vielfach an Stelle der X_{2n} die X_n der ξ^α bzw. die X_n der $\bar{\xi}^\alpha$ behandeln. Führt man insbesondere in die X_n eine lineare Übertragung Γ_{β}^{λ} und einen hermiteschen Fundamentaltensor $g_{\lambda\bar{\beta}}$ ein, so ergibt sich im Falle kovariant konstanter Metrik der Fall eines sogenannten unitären Raumes K_n . — Verf. stellt sich die Aufgabe, die „geodätische Äquivalenz“ zweier unitärer Räume K_n und K'_n zu charakterisieren. Dafür hatte N. Coburn [Bull. Amer. math. Soc. 47, 901—910 (1911), dies. Zbl. 27, 429] bereits folgende Resultate gewonnen: (1) zwei torsionsfreie unitäre Räume K_n und K'_n haben dann und nur dann entsprechende geodätische Kurven, wenn ein Vektor p_r derart bestimmt werden kann, daß für die Übertragungen $\Gamma_{\nu\mu}^\alpha$ und $\bar{\Gamma}_{\nu\mu}^\alpha$ von K_n und K'_n die Bedingungen $\bar{\Gamma}_{\nu\mu}^\alpha = \Gamma_{\nu\mu}^\alpha + 2 p_{(\nu} A_{\mu)}^\alpha, A_\mu^\alpha = \partial \xi^\alpha / \partial \bar{\xi}^\mu$ bestehen; (2) zwei unitäre Räume K_n und K'_n , einer mit verschwindender und einer mit nichtverschwindender Torsion, sind geodätisch nicht äquivalent. Diese Ergebnisse ergänzt Verf. durch den Satz: existiert ein Vektor r_ν , welcher die Relationen $\bar{\Gamma}_{\nu\mu}^\alpha = \Gamma_{\nu\mu}^\alpha + 2 r_{(\nu} A_{\mu)}^\alpha$ befriedigt, so haben die unitären Räume K_n und K'_n dieselbe Torsion $S_{\lambda\mu}^\nu$; existiert ein zweiter Vektor s_ν derart, daß die Relationen $S_{\nu\lambda}^{\bar{k}} (\bar{q}_{\bar{\mu}}^{\bar{k}} q^{\bar{\lambda}\alpha} - q_{\mu}^{\bar{k}} q^{\bar{\lambda}\alpha}) = 2 s_{(\lambda} A_{\mu)}^\alpha$ befriedigt werden, so sind K_n und K'_n geodätisch äquivalent.

M. Pinl.

Moor, Arthur: Finslersche Räume mit der Grundfunktion $L = f/g$. Comment. math. Helvetici 24, 188—195 (1950).

Verf. betrachtet diejenigen zwei-dimensionalen Finslerschen Räume, für welche f und g die Form $f = \sum_{k=0}^n a_k(x, y) \dot{x}^{n-k} \dot{y}^k, g = \sum_{k=0}^{n-1} b_k(x, y) \dot{x}^{n-k-1} \dot{y}^k$ besitzen. Die entsprechenden Werte der Funktion F_1 und des Berwaldschen Hauptskalars J [J. reine angew. Math. 156, 191—222 (1927)] werden berechnet. Insbesondere untersucht Verf. die Fälle $n = 2$ und $n = 3$. Für $n = 2$ ergibt sich, daß wenn $\begin{vmatrix} f_{\dot{x}} & f_{\dot{y}} \\ g_{\dot{x}} & g_{\dot{y}} \end{vmatrix}$ identisch verschwindet, auch F_1 verschwinden muß. Dann ist J unbestimmt. Umgekehrt ist letzteres immer der Fall, wenn $F_1 = 0$ ist. Diejenigen Räume, für welche J konstant ist [die von Berwald benannten (loc. cit.) affinzusammenhängenden Räume] werden durch die Form $L = (c_0 \dot{x} + c_1 \dot{y})^2 / (d_0 \dot{x} + d_1 \dot{y})$ der Grundfunktion charakterisiert. Für $n = 3$ wird eine Einteilung der Formen dritter Ordnung mit Hilfe der Hesseschen Kovariante Δ und der Diskriminante R ausgeführt. Die Werte von F_1 und J werden für die Fälle $\Delta = 0, R = 0$ und $R = 0, \Delta \neq 0$ berechnet, und die Bedingungen angegeben dafür, daß J konstant sei. Schließlich wird der Wert des Berwaldschen Krümmungsskalars \mathfrak{K} (loc. cit.) für den Fall $L = a \dot{x}^n / b \dot{y}^{n-1}$ bestimmt. In diesem Fall ist $J = \text{konst.}$, und hat insbesondere $\log(a/b)$ die Form $\alpha(x) + \beta(y)$, so wird $\mathfrak{K} = 0$ und man erhält eine Minkowskische Geometrie.

Hanno Rund.

● Jeger, Max: Projektive Zusammenhänge und Gewebe. Olten: Verlag

{ Otto Walter AG. 1949. 47 S. (Diss.).

Jeger, M.: Topologische Fragen der Differentialgeometrie. — Projektive Methoden in der Gewebegeometrie. Comment. math. Helvetici 24, 260—290 (1950).

Bekannte Ergebnisse über ebene Kurven- und räumliche Flächengewebe (vgl. W. Blaschke und G. Bol, Geometrie der Gewebe, Berlin 1938; dies. Zbl. 20, 67) werden hier verallgemeinert auf Hyperflächengewebe im R_n . Es werden projektive Zusammenhänge betrachtet, für die die Hyperflächen eines solchen Gewebes total-geodätisch sind, das gleiche gilt dann für ihre Schnittgebilde. Jedes $(n+2)$ -Gewebe bestimmt eindeutig einen solchen Zusammenhang. Das gleiche gilt für jedes $(n+1)$ -Gewebe, wenn man noch verlangt, daß von den in den zweidimensionalen Schnittflächen ausgeschnittenen 3-Geweben auch die Doppelverhältnisscharen, das sind jene, die sie unter konstantem Doppelverhältnis schneiden, geodätisch sind [DV-System eines $(n+1)$ -Gewebes]. Sind sämtliche $\binom{n}{2}$ zweidimensionale Schnittgewebe, die n der Hyperflächenscharen angehören, Sechseckgewebe, so gilt das gleiche für die übrigen $\binom{n}{3}$; vgl. H. Aue, Mitt. Math. Ges. Hamburg 7, 367—399 (1938); dies. Zbl. 19, 279. Ein $(n+2)$ -Gewebe läßt sich dann und nur dann ebenflächig machen, wenn der zugehörige Zusammenhang projektiv-euklidisch ist. Ist das DV-System eines $(n+1)$ -Gewebes projektiv-euklidisch, so ist für $n > 2$ nicht immer eine Abbildung auf Parallelscharen möglich (Parallelisierbarkeit), sondern beispielsweise für $n = 3$ nur eine solche auf Ebenenbüschel, deren Achsen im Kleinschen Geradenraum Punkte einer zweidimensionalen Ebene entsprechen. Sind sämtliche dreidimensionale Schnittgewebe Achtflächgewebe, so ist das Gewebe parallelisierbar. Parallelisierbare Gewebe lassen sich auch kennzeichnen durch das Vorhandensein weiterer Hyperflächenscharen, denen im dreidimensionalen Fall die Diagonalfächenscharen entsprechen.

Gerrit Bol.

Bompiani, Enrico: Topologia differenziale. V. Geometria delle superficie in uno spazio proiettivo curvo a tre dimensioni. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 8, 271—275 (1950).

(Teil I—IV s. dies. Zbl. 37, 238). In Teil I dieser Reihe hat Verf. ein zu zwei Kurvenelementen E_2 zweiter Ordnung mit gemeinsamer Tangente gehöriges Flächenelement erster Ordnung definiert, das allen Flächen gemeinsam ist, welche beide E_2 enthalten; man kann es das Schmiegelement beider E_2 nennen. Hier zeigt er, wie man mit dessen Hilfe differential-geometrische Begriffe des gewöhnlichen projektiven Raumes auf solche mit projektivem Zusammenhang übertragen kann. So ist das Schmiegelement eines E_2 mit dem geodätischen Element gleicher Richtung ein Analogon der Schmiegeebene dieser E_2 ; wir nennen es kurz Schmiegeelement des E_2 . In naheliegender Weise gelangt man so zur Verallgemeinerung der Asymptotenlinien, die im allgemeinen wieder ein Netz bilden. Eine eindeutige Abbildung zweier Flächen verschiedener Räume aufeinander, die die Asymptotenlinien erhält und bei der solche E_2 , deren Schmiegeelemente eine Richtung gemeinsam haben, stets auf ebensolche abgebildet werden, läßt sich als Analogon der Projektivabwicklung von Fubini und Čech auffassen und hat weitgehend analoge Eigenschaften. Unterschiede treten aber stets dann ein, wenn man auch Kurvenelemente dritter Ordnung heranzieht.

Gerrit Bol.

Rogovoj, M. R.: Zur projektiven Differentialgeometrie anholonomer Flächen im dreidimensionalen Raume. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 66, 1055—1057 (1949) [Russisch].

Lo studio proiettivo-differenziale delle superficie anolome dello spazio a tre dimensioni, già oggetto di precedenti lavori di altri Autori (D. Sincov: questo Zbl. 4, 418; A. Maxia: questo Zbl. 11, 323; E. Bompiani: questo Zbl. 18, 274;

F. Vyčichlo: questo Zbl. 20, 70) viene rielaborato brevemente in questa Nota facendo uso del tetraedro mobile. Una parte del lavoro riguarda i due fasci di Darboux (coincidenti nel caso di una superficie ordinaria), mentre un'altra parte concerne gli invarianti in relazione con la caratteristica proiettiva dell'anolonomia.

Piero Buzano.

Sirokov, P. A.: Projektiv-euklidische symmetrische Räume. Trudy Sem. vektor. tenzor. Analizu. Moskva-Leningrad 8, 73—81 (1950) [Russisch].

Verf. betrachtet einen projektiveuklidischen Raum D_n . In bezug auf ein ausgezeichnetes Bezugssystem haben die Übertragungsparameter die Gestalt $\Gamma_{ji}^h = 2 A_{(i}^h \psi_{j)}$. Es wird gezeigt, daß D_n dann und nur dann symmetrisch ist im Cartanschen Sinne ($\nabla_i R_{kji}^h = 0$), wenn gilt

$$\psi_i = -\frac{1}{2} \partial_i \log q; \quad q = a_{ij} x^i x^j + a_i x^i + a.$$

In diesem Falle ist der Tensor $\psi_{ij} = \partial_i \psi_j - \psi_i \psi_j$ kovariant konstant, und es zeigt sich, daß ψ_{ij} bis auf einen konstanten Faktor der einzige kovariant konstante Tensor ist. Ist $\text{Det}(\psi_{ij}) \neq 0$, d. h. ist die Hyperfläche $q = 0$ nicht entartet, so ist D_n ein S_n (konstante Krümmung). Es wird weiter gezeigt, daß die Deformationen des Raumes, welche den Parallelismus invariant lassen, diejenigen sind, welche auch die Fläche $q = 0$ invariant lassen. Die Arbeit schließt mit einer Bemerkung von A. P. Norden über den Zusammenhang zwischen der Polarität in bezug auf q und die zu q gehörige Übertragung.

Johannes Haantjes.

Su, Chin: Axiom of the plane in a space of k -spreads. Sci. Record, Acad. Sinica 3, 7—16 (1950).

Ein Unterraum S_l ($l > k$) in einem Raume S von „ k -spreads“ [vgl. B. Su, Sci. Record, Acad. Sinica 2, 11—19 (1947)] wird eben genannt, wenn die „ k -spreads“, welche S_l tangieren, in S_l enthalten sind. Es wird gezeigt, daß S ein projektiveuklidischer Raum ist, wenn sich durch jeden Punkt in jeder l -Richtung ($l > k$) Ebene S_l anbringen lassen.

Johannes Haantjes.

Ku, Chao-Hao: New treatment of geometries in a space of k -spreads. Sci. Record, Acad. Sinica 3, 41—51 (1950).

Verf. betrachtet in einer X_n (Koordinaten x^i) die Differentialgleichung (1) $\partial_i \partial_j \Phi_\lambda = A_{ij}^h(x, \partial_k \Phi) \partial_h \Phi_\lambda$, wo die Funktionen A_{ij}^h homogen nullten Grades in $\partial_k \Phi$ sind. Aus den A_{ij}^h , welche sich wie Übertragungsparameter transformieren, werden die Ausdrücke Ω_{ij}^h abgeleitet, die unter Transformationen (2) $\Psi_\mu = \Psi_\mu(\Phi_\lambda)$ des Systems Φ_λ invariant sind. Der Raum wird eben (descriptively flat) genannt, wenn die Lösungen von (1) durch eine geeignete Transformation (2) in die Form $\Phi_\lambda = a_{\lambda i} x^i + b_\lambda$ ($a_{\lambda i}$, b_λ Konstanten) gebracht werden können. Es werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen abgeleitet dafür, daß die X_n eben ist.

Johannes Haantjes.

Ku, Chao-Hao: On the descriptive geometry of a space of k -spreads. Sci. Record, Acad. Sinica 3, 53—59 (1950).

Ein Raum von „ k -spreads“ kann auf zwei Weisen definiert werden, nämlich mittels der Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 x^h}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} = \Gamma_{ji}^h(x, p) p_\alpha^j p_\beta^i \quad (p_\alpha^i = \partial_\alpha x^i)$$

[vgl. B. Su, Sci. Record., Accad. Sinica 2, 11—19 (1947)], aber auch mittels der Differentialgleichungen des vorsteh. Referates. Der Zusammenhang zwischen den zugehörigen Übertragungsparametern wird angegeben. Verf. gibt noch einige geometrische Charakterisierungen der „ebenen“ Räume (vgl. vorsteh. Referat).

Johannes Haantjes.

Pratelli, Aldo M.: Sul campo elettromagnetico „ortogonale“ nello spazio-tempo. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 9, 251—256 (1950).

Der elektromagnetische Bivektor ist dann und nur dann einfach, wenn $F_{[\mu\lambda} F_{\nu\lambda]} = 0$. Dies ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $F_{\mu\lambda} = 2 \partial_{[\mu} \varphi_{\lambda]}$, wo φ_λ ein kovarianter Vektor zweiter Klasse ist, d. h. ein Produkt eines Skalars mit einem Gradienten. φ_λ ist bis auf einen Gradienten bestimmt und läßt sich weiter festlegen durch die Forderung $\partial_\lambda \varphi^\lambda = 0$. Ist $\varphi_\lambda = g \partial_\lambda f$, so ist das Feld $q^\mu V_3$ -normal. Ist umgekehrt $q^\mu V_3$ -normal, so ist $T_{\lambda\mu}$ einfach.

Jan Arnoldus Schouten.

Lanezos, Cornelius: Lagrangian multiplier and Riemannian spaces. Rev. mod. Phys., New York **21**, 497—502 (1949).

Die Riemannschen Geometrien, die sich aus einer quadratischen Weltfunktion ergeben, werden hier in einer neuen Weise auf der Basis des Lagrangeschen Multiplikators abgeleitet. Dabei ergeben sich, statt 10 Differentialgleichungen vierter Ordnung für die g_{ik} , 24 Differentialgleichungen zweiter Ordnung für eine Feldgröße, die ein Affinor der Valenz drei ist. Diese Größe, die alternierend in 2 Indizes ist, ist dem A -Affinor des Einsteinschen Fernparallelismus analog. Zwischen den Feldgleichungen bestehen 13 Identitäten. Die Struktur dieser Gleichungen wird untersucht, insbesondere für solche Felder, die nur wenig von dem euklidischen Fall abweichen, und es werden die Beziehungen zur Einsteinschen Gravitationstheorie und zum Einsteinschen Fernparallelismus diskutiert.

Jan A. Schouten.

Mira Fernandes, A. de: Trasporti finiti. Univ. Lisboa, Rev. Fac. Ci., II. S. A **1**, 5—21 (1950).

Es handelt sich um einen Kommentar und einige Zusätze zu A. Einsteins Theorie der Bivektorfelder [Ann. Math., Princeton, II. S. **45**, 1—23 (1944)]. Unter Bivektoren werden im Gegensatz zu der sonst üblichen Terminologie nicht schiefsymmetrische Tensoren zweiter Stufe, sondern Produkte der Art $T_{\beta}^{\alpha} = A^{\alpha} B_{\beta}$ verstanden, wobei die Indizes i, k die Komponenten des gemischten Bivektors bezeichnen, die Indizes α und β jedoch auf verschiedene Punkte derselben Mannigfaltigkeit hinweisen. A^{α} ist somit ein kontravarianter Vektor im Punkte α der Mannigfaltigkeit, B_{β} ebenso ein kovarianter Vektor im Punkt β . Mit derartigen Vektorpaaren entwickelt A. Einstein eine Theorie eines endlichen affinen Zusammenhanges. Sodann wird der Vektor $A^{\alpha} = \omega_{\alpha}^{*i} A^i$ die „Vereisung“ (congelamento) des kontravarianten Vektors A^{α} genannt, gewonnen mit Hilfe des beliebigen gemischten Bivektors ω_{α}^i mit nichtverschwindender Determinante $|\omega_{\alpha}^i| \neq 0$. Entsprechend wird

die Vereisung kovarianter Vektoren definiert. Der kontravariante Vektor $A^{\beta} = g_{\beta}^k A^k$, $g_{\beta}^k = |\omega_{\alpha}^i|^{-1} g_{\alpha}^k$ heißt der vom Punkte α nach dem Punkte β übertragene kontravariante

Vektor, der kovariante Vektor $B_{\beta} = h_{\beta}^k B_k$, $h_{\beta}^k = |\omega_{\alpha}^i|^{-1} h_{\alpha}^k$ entsprechend der vom Punkt α nach β übertragene kovariante Vektor. Weiterhin berichtet Verf. über ein Bedingungssystem, das A. Einstein diesen Übertragungsprozessen vorschreibt, und über dessen Konsequenzen. Mit Bezug auf eine frühere Arbeit [vgl. A. de Mira Fernandes, Portugaliae Math. **4**, 203—210 (1945)] wird die Unabhängigkeit der Einsteinschen Bedingungen diskutiert. Sodann werden einige neue Postulate für den Übertragungsprozeß vorgeschlagen und diskutiert. So soll etwa die Folge der Übertragungen von α nach β und von β nach γ äquivalent einem einzigen Übertragungsprozeß von α nach γ sein. Oder es wird verlangt, daß die Orthogonalität eines kovarianten und eines kontravarianten Vektors bei dem geschilderten Übertragungsprozeß invariant bleibt. Von besonderem Interesse werden dabei

natürlich Bedingungen, welche den Krümmungscharakter der Mannigfaltigkeit beeinflussen.

Max Pinl.

Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde. Integralgeometrie:

Haupt, Otto: Über die ebenen Bogen der linearen Ordnung drei. Acta Sci. math., Szeged 13, 153—162 (1950).

Die Gestalten der ebenen Bogen \mathfrak{B} der Ordnung Drei werden durch zwei einfache Kriterien bestimmt: erstens durch die Anzahl der Punkte von \mathfrak{B} auf der Verbindungsgeraden g der Endpunkte A und C , sowie durch die gegenseitige Lage dieser Punkte auf g , zweitens durch die Lage von \mathfrak{B} relativ zu g in der Umgebung von A und C . Hierbei spielen die Begriffe „Quasihut“ und „Quasischnabel“ eine wichtige Rolle. Ein beschränkter Bogen \mathfrak{B} hat im Endpunkt A einen Quasischnabel bzw. einen Quasihut, je nachdem es Geraden f durch zwei zu A beliebig benachbarte Punkte von \mathfrak{B} gibt bzw. nicht gibt, von denen die Verbindungsstrecke AC getroffen bzw. nicht getroffen wird. Im Falle eines Quasihutes bzw. Quasischnabels an A verläuft der Bogen \mathfrak{B} in der Nähe von A innerhalb bzw. außerhalb des Winkelraumes, welcher von der Halbtangente an \mathfrak{B} in A und von der Halbgeraden AC gebildet wird. — So besitzt ein einfacher Bogen \mathfrak{B} vom Index Null, der von g außerhalb der Endpunkte nicht getroffen wird, die Gestalten: Ist der eine Endpunkt in Quasihut, der andere aber ein Quasischnabel, so enthält \mathfrak{B} einen Schnabel. Sind aber beide Endpunkte Quasischnäbel, so enthält \mathfrak{B} zwei Schnäbel oder einen Dorn. Weitere Ergebnisse gelten in dem Falle, daß \mathfrak{B} von g in einem Punkt S geschnitten wird und die Punkte A und C von S getrennt bzw. nicht getrennt sind. Auch die Bogen \mathfrak{B} vom Index Eins lassen sich nach ihren Gestalten klassifizieren. — Die Gestalt von \mathfrak{B} ist dabei im wesentlichen durch die Anzahl und Art der ordnungsingulären Punkte von \mathfrak{B} und durch die Mindestanzahl der größten singularitätenfreien Konvexbogen festgelegt, aus denen \mathfrak{B} sich zusammensetzen läßt. — Die ausführlichen Beweise werden in einer späteren Note nachgetragen. Gy. Sz.-Nagy.

Rédei, L.: Über das Dreieckpaar. Studii Cerc. mat., Acad. Republ. popul. Române, Inst. Mat. 1, 87—110 [Rumänisch], russische Zusammenfassg. 111—113, deutsch 114—137 (1950).

Ordnet man die Ecken zweier Dreiecke A und B der Ebene unter Erhaltung des Umlaufsinnns eindeutig einander zu, so gibt es eine eindeutig bestimmte Affinität $S(A, B)$ welche entsprechende Ecken in einander überführt. Durch eine Drehung von A kann man erreichen, daß S zwei aufeinander senkrechte Richtungen invariant läßt (Konjunktion) oder in die entgegengesetzten überführt (Opposition). Sind den Seiten a_1, a_2, a_3 von A die Seiten b_1, b_2, b_3 von B zugeordnet und setzt man

$$H(x, y) = x_1^2(-y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) + x_2^2(y_1^2 - y_2^2 + y_3^2) + x_3^2(y_1^2 + y_2^2 - y_3^2)$$

„gemischte Heronsche Form“, ist $F(A)$ der Flächeninhalt von A , so ist $H(a, a) = 6F(A)^2$, $\{a, b\} = \sqrt{\frac{1}{2}H(a, b) + \sqrt{H(a, a)H(b, b)}}$, so ist S dann und nur dann eine Kontraktion, d. h. für alle Strecken das Vergrößerungsverhältnis ≥ 1 oder für alle ≤ 1 , wenn $\frac{1}{2}\{a, b\} \leq F(A) + F(B)$. Es ist stets $H(a, b) > 0$ und $H(a, b)^2 \geq H(a, a)H(b, b)$. — Verf. untersucht dann das Verhalten des gemischten Flächeninhaltes $F(A, B)$ von A und B , wenn A gedreht wird. $F(A, B)$ kann nur dann ein relatives Minimum haben, wenn eine Seite von A zu einer von B parallel ist; es gibt daher auch höchstens 9 relative Maxima, für sie sind niemals zwei Seiten parallel, und $F(A, B)$ kann für sie nur einen der Werte $a_i b_k$ oder $\{a, b\}$ für beliebige Seitenzuordnung haben. Im letzten Fall ist die Lage die zur Zuordnung gehörige Opposition. Diese und nur diese drei relativen Maxima treten auf, wenn die Dreiecke spitzwinklig sind und Winkel $\geq \pi/4$ haben. Für weitere Einzelheiten vgl. man die Arbeit.

Gerrit Bol.

Bieri, H.: Die 1. Variation der Maßzahlen eines Elementarkegels. *Comment. math. Helvetici* **24**, 232—237. (1950).

Wir betrachten auf einer Eifläche E ein einfach zusammenhängendes Flächenstück S von der Oberfläche F und der Randlänge s . Verbinden wir jeden Punkt von S mit einem innerhalb von E liegenden Punkt O , so entsteht ein sogenannter Elementarkegel K , der außer den Maßzahlen F und s durch Volumen V , Integral der mittleren Krümmung M und räumlichen Winkel ω bei O charakterisiert wird. Hier wird die erste Variation der betrachteten fünf Maßzahlen F , V , M , s und ω bei beliebiger Veränderung von K hergeleitet. L. Fejes Tóth.

● **Vidal Abascal, E.:** Integral-Geometrie auf gekrümmten Flächen. (Consejo superior de investigaciones científicas No. VII. Publicaciones del observatorio de la Universidad No. VII). Santiago de Compostela: Imp. y Enc. del Seminario Conciliar 1950. 62 p. [Spanisch].

Die Arbeit beginnt mit einer Übersicht über die bisherigen Untersuchungen auf diesem Gebiet, gestützt auf ein ausführliches Literaturverzeichnis mit mehr als 134 Nummern. Dann werden in Zusammenhang mit Untersuchungen von H. Poincaré und E. Cartan einige Eigenschaften der Integralinvarianten bei geodätischen Linien und Problemen der Punktdynamik dargestellt und Formeln von J. Steiner für Parallellinien auf krumme Flächen übertragen. Wilhelm Blaschke.

Angewandte Geometrie:

● **Schwidefsky, K.:** Grundriß der Photogrammetrie. 4. verbesserte und erweiterte Auflage der „Einführung in die Luft- und Erdbildmessung“. Bielefeld: Verlag für Wissenschaft und Fachbuch 1950. 228 S. 17,80 DM.

Krames, J.: Über die Orientierungsbewegungen zweier Zielstrahlbündel in der Photogrammetria, *Wien* **1**, 110—115 (1949/50).

Verf. beweist unter anderem folgende Sätze: 1. Wird bei einer eng begrenzten Verlagerung zweier Zielstrahlbündel in drei Raumpunkten P_1 , P_2 , P_3 dieselbe (genügend kleine) y -Parallaxe dp_y hervorgerufen, so gilt gleiches auch für alle Punkte des kubischen Kreises, der die Kernachse zur Bisecante hat und durch P_1 , P_2 , P_3 sowie durch die unendlich feinen Kreispunkte der zur Kernachse normalen Ebenen geht. 2. Bezeichnet man n Raumpunkte (oder die zugehörigen Zielstrahlenpaare) als „allgemein gelegen“, wenn durch diese Punkte weder eine orthogonale Regelfläche zweiten Grades mit einer Haupterzeugenden in der Kernachse noch ein orthogonales Ebenenpaar, bestehend aus einer Kernebene und einer Normalebene zur Kernachse, gelegt werden kann, so gibt es keine Verlagerung der beiden Zielstrahlbündel, bei der in mehr als vier „allgemein gelegenen“ Punkten gleichzeitig dieselbe (genügend kleine) Parallaxe dp_y erzeugt wird. — Dies ist im Einklang mit der bekannten merkwürdigen Tatsache, daß die bisher üblichen Orientierungsverfahren überhaupt nicht konvergieren. M. Piazzolla-Beloch.

Topologie:

Smirnov, Ju. M.: Über topologische Räume, die in einem gegebenen Mächtigkeitintervall kompakt sind. *Izvestija Akad. Nauk. SSSR, Ser. mat.* **14**, 155—178 (1950) [Russisch].

Es seien a und b zwei unendliche Kardinalzahlen und $a \leq b$. Der topologische Raum X heiße kompakt im Mächtigkeitintervall $[a, b]$, wenn er die folgende Bedingung erfüllt: A. Jede Menge $M \subset X$, deren Mächtigkeit m eine reguläre Kardinalzahl $a \leq m \leq b$ ist, besitzt in X einen „vollen“ Verdichtungspunkt, d. h. einen solchen, von dem jede Umgebung eine Teilmenge von M der Mächtigkeit m besitzt. — Gleichwertig mit A ist: B. Jedes wohlgeordnete System von abnehmenden, abgeschlossenen nicht leeren Mengen aus X , das einen regulären Ordnungstypus θ mit $\omega(a) \leq \theta \leq \omega(b)$ (ω = Anfangszahl) hat, besitzt einen nicht leeren Durchschnitt. — Verf. beweist, daß äquivalent zu A und B auch folgende Bedingung ist: W. Jede (offene) Überdeckung von X mit regulärer Mächtigkeit m , $a \leq m \leq b$, enthält eine Überdeckung von X von der Mächtigkeit m .

igkeit $< a$. — Der Beweis erfordert die Einführung einer Reihe neuer Begriffe der Mengenlehre: Die Kardinalzahl m heiße a -regulär, wenn sie nicht als Summe von Kardinalzahlen $< m$ dargestellt werden kann, deren Anzahl $< a$ ist. Die Ordnungszahl θ heiße a -regulär, wenn sie zu einer Zahl θ' mit $\theta' < \omega(a)$ konfinal ist. — Die Bedingungen A^a, B^a, W^a werden wie A, B, W formuliert; nur seien m, θ a -regulär. Ferner seien A^0, B^0, W^0 diejenigen Bedingungen, die wie A, B, W lauten, wenn jedoch auf jede Regularitätseigenschaft von m, θ verzichtet wird. — Ein System von Mengen heiße a -zentriert, wenn jedes Teilsystem der Mächtigkeit $< a$ einen nicht-leeren Durchschnitt hat. Dann sei die Eigenschaft $(BW)^0$: Jedes a -zentrierte, wohlgeordnete System des Typus θ , $\omega(a) \leq \theta \leq \omega(b)$, abnehmender abgeschlossener Mengen des Raumes R besitzt einen nicht-leeren Durchschnitt. Durch die Einführung von Regularitätsforderungen an θ entstehen: (BW) bzw. $(BW)^a$. — Verf. beweist nun die Äquivalenz der folgenden 9 Eigenschaften: $A^a, A, B^a, B, (BW)^0, (BW)^a, (BW), W^a, W$. Wenn b eine reguläre Kardinalzahl ist, ist zu allen diesen auch noch W^0 äquivalent. — Der Raum R heiße $[a, \infty]$ - oder „ a -final“-kompakt, wenn er $[a, b]$ -kompakt ist für beliebiges $b \geq a$. Im Falle von $a = \aleph_1$ heiße R dann „final“-kompakt schlechthin. Final kompakte Räume haben eine Reihe von Eigenschaften der Räume mit abzählbarer Basis. Es seien F und Φ zwei punktfremde Mengen des regulären Raumes R . Wenn F und Φ final kompakt sind, so haben sie in R punktfremde Umgebungen. — Auch der Begriff der lokalen Kompaktheit wird verallgemeinert: R heiße lokal $[a, b]$ -kompakt, wenn jeder Punkt von R eine Umgebung besitzt, deren abgeschlossene Hülle $[a, b]$ -kompakt ist. Es gilt: Dafür, daß der Hausdorffsche Raum R sich durch Hinzufügung eines Punktes zu einem Hausdorffschen $[a, b]$ -kompakten Raume erweitern läßt, ist die lokale $[a, b]$ -Kompaktheit von R notwendig und hinreichend. — Der Raum R heiße „kogredient“ $[a, b]$ -kompakt, wenn jede Teilmenge von R $[a, b]$ -kompakt ist. — Verf. beweist: Es sei $[a, b]$ ein nichttriviales Mächtigkeitsintervall (d. h. entweder ist $a < b$ oder im Falle $a = b$ ist a regulär.) Dann ist die Eigenschaft der kogredienten $[a, b]$ -Kompaktheit äquivalent der kogredienten $[a, \infty]$ -Kompaktheit. — Ein weiterer Satz bezieht sich auf die folgenden Begriffe: a sei eine reguläre Kardinalzahl. Eine Menge heiße a -insichdicht, wenn jeder Punkt ein Verdichtungspunkt der Mächtigkeit a ist. Eine Menge heiße a -nirgendsdicht, wenn sie keine nichtleere a -insichdichte Teilmenge enthält. — Verf. beweist: Dafür, daß der Raum R kogredient $[a, \infty]$ -kompakt ist, ist jede der folgenden Bedingungen notwendig und hinreichend: P) Jede in R liegende Menge ist Summe einer a -insichdichten Menge, die auch leer sein kann, und einer Menge der Mächtigkeit $< a$. P') Jede a -nirgendsdichte Menge von R hat eine Mächtigkeit $< a$. P'') Jede nirgendsdichte Menge von R hat eine Mächtigkeit $< a$. — Zum Schluß beweist Verf. einen Satz über die Mächtigkeit kogredienter $[a, \infty]$ -kompakter Räume.

Walter Thimm.

Shirota, Taira: On systems of structures of a completely regular space. Osaka math. J. 2, 131—143 (1950).

The author refers to „Convergence and uniformity in topology“ (Princeton 1940) by J. W. Tuckey for most of the notions and notations used in his paper. He considers the set of all structures over a completely regular space R . An order is introduced in the usual manner into it and the ordered system thus obtained is denoted by $D(R)$. The following notions are defined: m denoting a certain cardinal number, an m -structure is one, the uniformity of which contains a basis $\{U_\alpha\}$, $\alpha \in A$, where A has a cardinal number $\leq m$. Then $D_m(R)$ stands for the set of all m -structures over R , $D_t(R)$ is the subsystem of $D(R)$ consisting of all totally bounded structures, $D_c(R)$ stands for the set of all complete structures. Further $D_{cm}(R) = D_c(R) \cap D_m(R)$, $D_{tm} = D_t(R) \cap D_m(R)$. — The main results of the author are stated in four theorems, the first one about necessary and sufficient conditions for $D_m(R)$ to have the minimum, the second on similar conditions for $D_{cm}(R)$ to have the minimum, the third one, on similar conditions for $D_m(R)$ to have the maximum, the last one on similar necessary and sufficient conditions for $D_{tm}(R)$ to have the maximum. — In a last paragraph the author gets interesting results about the cardinal numbers of $D(R)$ and of certain of its subsystems. In particular, he proves that if R is not bicomcompact, the cardinal number of $D_{\aleph_0}(R)$ is not smaller than 2^{\aleph_0} . If R however is separable and bicomcompact, then the potency of $D(R)$ and $D_t(R)$ is $2^{2^{\aleph_0}}$, that of $D_{\aleph_0}(R)$ and $D_{t\aleph_0}(R)$ is 2^{\aleph_0} . — It is surprising that an article on uniformizable spaces should not refer to N. Bourbaki (Livre III, chapitres II and IX; this Zbl. 6, 431, 31, 55). The results developed in chapter IX are particularly important.

C. Racine.

Edrei, Albert: On mappings of a uniform space onto itself. Trans. Amer. math. Soc. 69, 528—536 (1950).

This paper continues a previous investigation of the same author which is to be published shortly by the J. London math. Soc. It deals with the set of all mappings of a uniform space E into another uniform space F . The space of these mappings may be topologized so as to become a uniform space. (See: N. Bourbaki, Livre III, ch. X, p. 1—2; this Zbl. 36, 386). With such a topology, this space is denoted by the author $J_u(E, F)$. — The interesting results obtained by the author necessitate, to be stated and proved, a considerable number of new notions. Introducing the filters of vicinities $\{U\}$ and $\{V\}$ to define the topologies of E and F , it is natural to speak of two mappings differing by less than V . The notion of V -continuity is also one which is quite obvious. A finite set of mappings is said to be a V -net for a family H if every element of H differs by less than V from some element of the net. If all the elements of a family H except n , n depending on V , are V -continuous, H is said to be almost smooth. To be equally almost smooth for the same family means to be uniformly continuous after removal of a finite number of elements. A weaker smoothness, called scattered smoothness is also introduced. A uniform space is called totally bounded if for every V there exists a V -net in F . — These notions lead to a new version of Ascoli-Gottschalk theorem: If E and F be totally bounded uniform spaces and the family $H \subset J_u(E, F)$ is equally almost smooth, then H is a totally bounded space. The converse holds. — The case $E = F$ is specially considered and three theorems as well as a certain number of Corollaries are stated and proved in the last five paragraphs. They make use of a new notion, that of an iterative family $H \subset J_u(E, F)$. H is iterative if in each infinite subset $\{g\}$ of H there exist two distinct mappings, g_1 and g_2 , such that the equation $u \cdot g_1 = g_2$ has a solution u in H . H is said to be strongly iterative if, whatever be $h \in H$, there is, in every infinite subset of H , a mapping g such that $u \cdot h = g$ admits a solution u in H . — The theorems proved by the author are the following: I. Let E be a totally bounded uniform space and H an iterative family of mappings of E onto itself. Let H' be the closure of H . Then if H has scattered smoothness there is an $e \in H'$ such that $e(x) = x$, $x \in E$. If H is also a semi group, then $e \in H \subset H'$. — II. If E is a totally bounded, separated, uniform space and H a strongly iterative family in $J_u(E, F)$, if H has scattered smoothness, then H is a family of one-to-one mappings and $H^{-1} \subset H'$. — III. If E is compact and H an infinite strongly iterative semi group, equally almost smooth, then $H' = (H^{-1})'$ is a group and its elements are uniformly equicontinuous. C. Racine.

Sierpiński, Waclaw: Sur les relations entre quelques propriétés fondamentales des espaces topologiques. C. r. Soc. Sci. Lett. Varsovie, Cl. III 40, 67—78 und polnische Zusammenfassg. 66 (1948).

Für einen topologischen T_1 -Raum bezeichne: H die Eigenschaft, Hausdorffsch zu sein, A die Eigenschaft, dem 1. Abzählbarkeitsaxiom zu genügen, B die Eigenschaft, eine abzählbare Basis zu besitzen, C die Eigenschaft, daß eine Punktfolge nicht gegen zwei verschiedene Punkte konvergieren kann, D die Eigenschaft, abzählbar zu sein. Verf. zeigt: aus A und D folgt B und aus A und C folgt H . — Ist X eine Eigenschaft, so bedeute X' ihre Negation. Sind $X_1—X_5$ fünf Eigenschaften, so bedeute $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) = 1$ bzw. 0, daß mindestens ein bzw. kein topologischer T_1 -Raum mit den Eigenschaften $X_1—X_5$ existiert. Verf. beweist: $(H A B C D) = 1$, $(H A B C D') = 1$, $(H A B C' D) = 0$, $(H A B C' D') = 0$, $(H A B' C D) = 0$, $(H A B' C D') = 1$, $(H A B' C' D) = 0$, $(H A B' C' D') = 0$, $(H A' B C D) = 0$, $(H A' B C D') = 0$, $(H A' B C' D) = 0$, $(H A' B C' D') = 1$, $(H A' B' C D) = 0$, $(H A' B' C D') = 0$, $(H A' B' C' D) = 0$, $(H A' B' C' D') = 0$, $(H' A B C D) = 0$, $(H' A B C D') = 1$, $(H' A B C' D) = 1$, $(H' A B C' D') = 0$, $(H' A B' C D) = 0$, $(H' A B' C D') = 0$, $(H' A B' C' D) = 1$, $(H' A B' C' D') = 0$, $(H' A' B C D) = 0$, $(H' A' B C D') = 0$, $(H' A' B C' D) = 0$, $(H' A' B C' D') = 0$, $(H' A' B' C D) = 1$, $(H' A' B' C D') = 1$, $(H' A' B' C' D) = 1$, $(H' A' B' C' D') = 1$. Georg Nöbeling.

Sierpiński, W.: Sur une définition des espaces complets. Gaṇita, Lucknow 1, 13—16 (1950).

On sait (cf. C. Kuratowski, Topologie I, 2^e éd., Warszawa 1948; pp. 319—320), que tout espace métrique complet est caractérisé par la propriété (C) que voici: chaque suite descendante d'ensembles fermés (extraits de l'espace) et dont les diamètres tendent vers 0 donne, pour partie commune un point unique de l'espace. L'A. prouve qu'on y peut remplacer le mot „ensembles“ par le mot „sphéroïdes“ [la propriété provenant ainsi de la propriété (C) est appelée, par l'A., „propriété

d'Ascoli^[1]. — En montrant, par un exemple, que dans un espace métrique complet la partie commune d'une suite descendante de sphéroïdes fermés peut être vide, l'A. expose le résultat suivant de M. Mazur: Si dans un espace métrique complet, quel que soient les points a', a'' de l'espace et le nombre réel $r'' > 0$, il existe un point x_0 de l'espace tel que $\rho(a'', x_0) = r'', \rho(a', x_0) = \rho(a', a'') + \rho(a'', x_0)$ alors la partie commune de chaque suite descendante de sphères fermées dont les diamètres $\rightarrow 0$ se compose d'un point unique.

George Kurepa.

Vijayaraghavan, T.: On two problems relating to linear connected topological spaces. J. Indian math. Soc., n. S. 11, 28—30 (1947).

Verf. gibt auf folgende zwei Fragen von Vaidyanathaswamy durch Gegenbeispiele eine negative Antwort: 1. Enthält jeder zusammenhängende, linear geordnete, topologische Raum von der Mächtigkeit des Kontinuums eine in ihm dichte, abzählbare Teilmenge? 2. Für jeden Punkt x eines zusammenhängenden, topologischen Raumes S sei $S - x$ die Vereinigung von genau zwei fremden, offenen, zusammenhängenden Teilmengen; ist dann S ein linearer Raum? Georg Nöbeling.

Rodnjanskij, A. H. und Ju. D. Kašenko: Über irreduzible Kontinua. Mat. Sbornik, n. S. 26 (68), 321—340 (1950) [Russisch].

Die Eigenschaft eines Kontinuums C , irreduzibel zwischen zwei Punkten a und b zu sein, hat weitreichende und interessante Folgen bezüglich der Anordnung der Punkte, in denen C lokal zusammenhängend und nicht lokal zusammenhängend ist. L sei die Menge der Punkte lokalen Zusammenhanges von C und $M = C - L$. Verf. beweist u. a. die folgenden Sätze: a) Wenn C in x_0 lokal zusammenhängend ist, enthält jede Umgebung von x_0 eine zusammenhängende Umgebung dieses Punktes. b) Jede zusammenhängende Teilmenge von L ist entweder ein Punkt oder topologisch äquivalent einem offenen, halboffenen oder abgeschlossenen Intervall. Wenn L in einem Punkte lokal zusammenhängend ist, so ist L in diesem Punkte auch lokal kompakt. Die Umkehrung hierzu gilt nicht. c) Jede Komponente von M ist ein lokal kompaktes Semikontinuum, das mehr als einen Punkt enthält. Die Komponenten von M fallen mit den Semikomponenten von M zusammen. d) Das System der Komponenten von L , die mehr als einen Punkt enthalten, ist höchstens abzählbar; das System der einpunktigen Komponenten von L ist entweder endlich oder abzählbar oder von der Mächtigkeit des Kontinuums. e) Das System der Komponenten von M , die keine Kontinua sind, ist höchstens abzählbar; und das System aller Komponenten von M ist entweder endlich oder abzählbar oder besitzt die Mächtigkeit des Kontinuums. — Beim Beweis der beiden letzten Sätze wird eine interessante Ordnung der Menge der Komponenten von L und M benutzt, die aus einer Ordnung der Menge L abgeleitet wird; letztere ergibt sich aus der Irreduzibilitätseigenschaft von C . — Weniger über C wird in dem folgenden Satze vorausgesetzt: C sei ein metrischer Raum mit abzählbarer Basis. C sei irreduzibel zusammenhängend zwischen a und b . Zu jedem Punkte von C gebe es eine beliebig kleine Umgebung, deren Rand kompakt ist. Dann ist C ein einfacher Bogen. An die Stelle der letzten Voraussetzung kann der lokale Zusammenhang von C treten. Diese Sätze verallgemeinern ein Ergebnis von Sierpiński, welches voraussetzt, daß C ein Kompaktum sei.

Walter Thimm.

Utz, W. R.: Unstable homeomorphisms. Proc. Amer. math. Soc. 1, 769—774 (1950).

Un homéomorphisme instable (H. I.) d'un espace métrique X est un homéomorphisme Φ de X tel que pour $\delta > 0$ et $x, y \in X$ ($x \neq y$), il existe n tel que $\rho(\Phi^n(x), \Phi^n(y)) > \delta$. Si Φ est un H. I. et si X est compact, alors Φ^m est un H. I.; si de plus tout $Z \in X$ est adhérent à un ensemble de X ne contenant pas Z , il existe $x, y \in X$ ($x \neq y$) tel que les trajectoires $\Phi^n(x)$ et $\Phi^n(y)$, $n = \dots -1, 0, 1 \dots$ soient asymptotes l'une à l'autre si $n \rightarrow +\infty$ ou $-\infty$. Des résultats analogues sont

formulés pour les points fixes de Φ ou de Φ^m . L'article se termine par quelques exemples et remarques étroitement liés à la dynamique symbolique (Morse, Hedlund). Georges Reeb.

Leray, Jean: L'homologie filtrée. Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. Nr. 12 (Topologie algébrique, Paris 26. 6. — 2. 7. 1947), 61—82 (1949).

This is the revised text of a lecture delivered by J. Leray at the Colloquium of Algebraic Topology held in Paris in 1947. It is to a very great extent a summary of an extremely important memoir published by Leray (see: this Zbl. 38, 363). But it is an article more precious than a summary. In reading the memoir of 1950 one cannot help noticing that some points of view have changed in the mean time and the reading of the article under review will in many cases throw light on the more recent memoir. — As the latter will be reviewed in this Zbl., as well as the doctorate thesis of Koszul (this Zbl. 39, 29), in which the notion of rings with differential operators used by Leray is analysed in detail, the task of the reviewer may be limited to a rapid indication of the topics treated in Leray's lecture. — To the notion of graded ring with differential operator, is added that of a ring with differential operator and with a filtration. If, by means of such a ring, one wants to determine graded rings with differential operators, one has to define certain allowed ideals and the quotient rings determined by them. In this manner one obtains the notion of a sequence of rings, depending on an integral index, each one being the homology of the preceding one, the spectral homology ring. — The notion of tensor product leads to define filtered rings which are the intersections of a grating (complexe canonique), and of a notion systematizing the notion of „local coefficients“ due to Eilenberg, namely that of filtered pencil with differential operator. This notion which has applications in other fields than Algebraic Topology enables to build up a theory of the topological invariants of the mapping of one space into another, when both are locally compact. This theory is very briefly treated by Leray in his lecture and it is necessary to read his memoir of 1950 to arrive at a full understanding of it. — On the contrary the notion of homology (or, more precisely, of cohomology) of a space when it is determined by means of the tensor product of a fine „couverture“ and of a filtered pencil with differential operator is treated at great length in the second chapter of this lecture. In it are to be found the most important notions which the theory of the invariants of mappings require. — This lecture, along with the others delivered at the same Colloquium, particularly the first one by H. Cartan, show how fast Algebraic Topology has developed in the last five years. If an admirable systematization of the fundamental notions has been made, during this time, by H. Cartan and others, the new and extremely fruitful notions due to J. Leray and which this lecture summarily explains are no doubt responsible for most of the recent advance in this discipline.

C. Racine.

Cartan, Henri et Jean Leray: Relations entre anneaux d'homologie et groupes de Poincaré. Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. Nr. 12 (Topologie algébrique, Paris 26. 6. — 2. 7. 1947), 83—85 (1949).

This short note follows the account of Leray's lecture at the same Colloquium (s. preced. review). A first paragraph introduces the notion of fine „couverture“ of a finite group Γ . It is a graded algebra \mathfrak{R} with differential operator such that Γ is a finite group of allowed automorphisms of it and that it is the direct sum of a subalgebra \mathfrak{R}' and of its transforms by Γ . If \mathfrak{A} stands for a ring with differential operator, having with Γ the same relations as \mathfrak{R} , then \mathfrak{A} is said to be fine on Γ . — If \mathfrak{R} is a fine couverture of Γ , if \mathfrak{A} is filtered and fine on Γ , and if the operations of Γ leave invariant the filtration of \mathfrak{A} , then $H_{l+1}(\mathfrak{R}' \otimes \mathfrak{A}) \cong H(\mathfrak{R}' \otimes H_l(\mathfrak{A}))$ where the underlining of any set of elements stands for a restriction of these elements to those invariant by Γ . — The second paragraph makes an application of this and of

similar formulas to the following case: Γ is a finite group of topological mappings of a locally compact space X onto itself; no operation of Γ leaves a point of X invariant. If \underline{X} stands for the space obtained by identifying the points of X which are transformed one into the other by Γ , it is possible to determine the first term of a spectral homology ring whose last term is the graded homology ring of \underline{X} , suitably filtered. Thus a relation is obtained between $H(\underline{X} \circ \mathfrak{A})$ and $H(X \circ \mathfrak{A})$, as well as the effect of Γ on the last ring.

C. Racine.

Borel, Armand: Remarques sur l'homologie filtrée. J. Math. pur. appl., Paris, IX. S. 29, 313—322 (1950).

This article completes on a few points a recent and extremely important memoir, on the cohomology theory of a filtered grating, with local coefficients forming a pencil, by J. Leray (this Zbl. 38, 363). It has been published on the express request of Leray and should be considered as an Appendix to his memoir. — In a first section, a more systematic proof of Leray's Proposition 17,5 is developed and it leads to an improved wording of the proposition itself. It concerns the isomorphism between the rings which Leray denotes by $H_l(K^l \otimes A)$ and $K^l \otimes H_l A$. In the same section three theorems complete Leray's Proposition 10,6. The proofs are the classical „diagrammatic“ proofs which tend to play a more and more important part in Algebraic Topology. — Section 2 studies the intersections of a fine canonical grating (complexe) with two „proper“ pencils (faisceaux) B and B' , defined on a locally compact space, when there exists a homomorphic mapping of B' into B . Homomorphism or isomorphism between the rings denoted by $H(K^l \circ B')$ and $H(K^l \circ B)$ are established, under certain conditions. — Section 3 is about an application of the results obtained in the first two sections, in particular a new demonstration of Leray's theorem 56,1 and a few complements to it (theorem 5, *a* of this paper). These results concern isomorphisms between the cohomology rings, or the spectral cohomology rings, of a locally compact space and of its image by a „proper“ mapping.

C. Racine.

Hu, Sze-Tsen: On generalising the notion of fibre spaces to include the fibre bundles. Proc. Amer. math. Soc. 1, 756—762 (1950).

Verf. gibt eine verallgemeinerte Definition für den Begriff „fibre space“: X, B seien topologische Räume und Π eine stetige Abbildung von X auf B . X heißt fibre space über B bezüglich Π , wenn es zu jedem Punkte $b \in B$ eine Umgebung U von b und eine stetige Abbildung Φ_U von $U \times \Pi^{-1}(U)$ in X gibt, so daß $\Pi \Phi_U(b, x) = b$ und $\Phi_U(\Pi(x), x) = x$. Diese Definition hat den Vorteil, daß ein fibre bundle im Sinne von Whitney und Steenrod [dies. Zbl. 23, 176 und Ann. Math., Princeton, II. S. 45, 294—311 (1944)] unmittelbar als fibre space aufgefaßt werden kann. Die von Fox [Bull. Amer. math. Soc. 49, 555—557 und 733—735 (1943)] angegebene Definition des fibre space verallgemeinert die Definition von Hurewicz-Steenrod [Proc. nat. Acad. Sci. USA 27, 60—64 (1941)], ist aber spezieller als die Definition des Verf. und besitzt den erwähnten Vorteil nicht. Ein fibre space im Sinne des Verf., der die zusätzliche Eigenschaft hat, daß bei geeigneter Wahl der U und Φ_U die Funktionen Φ_U „einheitlich“ sind, d. h. $\Phi_U = \Phi_{U'}$ im Durchschnitt von $U \times \Pi^{-1}(U)$ und $U' \times \Pi^{-1}(U')$, ist ein fibre space im Sinne von Fox. Für fibre spaces X im Sinne des Verf. mit der Projektion Π und dem normalen Basisraum B gilt das „schwache“ covering homotopy theorem (W), das besagt: Voraussetzung: S kompakt, f stetige Abbildung von S in X , $h_t: S \rightarrow B$ ($0 \leq t \leq 1$) Homotopie mit $h_0 = \Pi f$. Behauptung: Es existiert eine „covering“ Homotopie $f_t: S \rightarrow X$ ($0 \leq t \leq 1$) mit folgenden Eigenschaften: $f_0 = f$; $\Pi f_t = h_t$ für $0 \leq t \leq 1$; bleibt ein Punkt $s_0 \in S$ bei h_t fest, dann bleibt s_0 auch bei f_t fest. — Die Gültigkeit von (W) rechtfertigt die Definition des Verf. Aus (W) allein folgen bekannte Homotopieeigenschaften, z. B.: es sei $b_0 \in B$, $X_0 = \Pi^{-1}(b_0)$ und $x_0 \in X_0$; Π erzeugt eine Isomorphie der relativen Homotopiegruppe $\Pi_n(X, X_0, x_0)$ mit der Homotopiegruppe

$\Pi_n(B, b_0)$, ($n \geq 2$). — Das „starke“ covering homotopy theorem besagt (vgl. Fox loc. cit.): Vor.: X fibre space mit einheitlichen Funktionen Φ_U ; Ω sei die Überdeckung von B mit den zu Φ_U gehörigen Umgebungen U ; S topologischer Raum; f stetige Abbildung von S in X ; $h_t: S \rightarrow B$ ($0 \leq t \leq 1$) Homotopie mit $h_0 = \Pi f$, die gleichmäßig bezüglich Ω ist. Beh. wie bei (W). — Verf. zeigt, daß für kompakte fibre spaces im Sinne seiner Definition auch ein starkes covering homotopy theorem gilt: Vor.: Der kompakte Hausdorffsche Raum X ist ein fibre space (im Sinne des Verf.) über dem (kompakten) Hausdorffschen Basisraum B . S ist vollständig regulär, f ist eine stetige Abbildung von S in X , $h_t: S \rightarrow B$ ($0 \leq t \leq 1$) ist eine Homotopie mit $h_0 = \Pi f$, die gleichmäßig bezüglich jeder offenen Überdeckung von B ist. Beh. wie bei (W). — Der Beweis erfolgt mit Hilfe der kompakten Erweiterung βS von S (vgl. z. B. E. Čech, dies. Zbl. 17, 428) und des Theorems (W).

Friedrich Hirzebruch.

Liao, S. D.: Concerning the generators of homotopy groups of a polyhedron. Proc. Amer. math. Soc. 1, 763—768 (1950).

Si P est un polyèdre fini connexe de dimension n , et si tous ses groupes d'homotopie $\pi_i(P)$, $1 < i < n$, sont nuls, on a le théorème suivant: Pour que $\pi_n(P)$ admette un nombre fini de générateurs, il faut et il suffit que le groupe fondamental $\pi_1(P)$ soit fini; si, en effet, $\pi_n(P)$ admet un nombre infini de générateurs, le revêtement universel \dot{P} de P n'est pas compact, donc $\pi_1(P)$ est infini; réciproquement, si $\pi_1(P)$ est infini, l'A. montre que presque tous les éléments de $\pi_1(P)$ opèrent non trivialement dans l'homologie $H_n(\dot{P})$; pour terminer, l'A. compare les groupes π_n de P et de P' , où le polyèdre P' s'obtient à partir de P par l'identification de deux points: $\pi_n(P')$ est la somme directe faible d'une infinité dénombrable de groupes isomorphes à $\pi_n(P)$.

René Thom.

Burger, E.: Über Gruppen mit Verschlingungen. J. reine angew. Math. Berlin 188, 193—200 (1950).

In der Topologie der Mannigfaltigkeiten tritt folgendes algebraische Problem auf: In einer endlichen abelschen Gruppe \mathfrak{G} sei jedem Elementpaar g_1, g_2 als „Verschlingungszahl“ eine modulo 1 bestimmte rationale Zahl $V(g_1, g_2)$ zugeordnet, so daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind: (1) $V(g_1, g_2) = V(g_2, g_1)$, (2) $V(g_1 + g'_1, g_2) = V(g_1, g_2) + V(g'_1, g_2)$, (3) zu jedem $g \neq 0$ aus \mathfrak{G} gibt es ein $g' \in \mathfrak{G}$ mit $V(g, g') \not\equiv 0 \pmod{1}$. Man nennt dann \mathfrak{G} eine Gruppe mit Verschlingung. Die Frage der Klassifikation der Gruppen mit Verschlingung ist vom Ref. (S.-B. Preuß. Akad. Wiss. 1933, 811—828) und van Kampen [Amer. J. Math. 60, 595—610 (1938); dies. Zbl. 19, 236] behandelt worden. Verf. führt das Problem auf die Minkowskische Theorie der quadratischen Formen zurück. Es genügt Gruppen von Primzahlpotenzordnung zu betrachten. Sind g_1, \dots, g_n die Elemente einer Basis von \mathfrak{G} mit den Ordnungen p^{v_1}, \dots, p^{v_n} ($v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_n$), so ist die Verschlingung von \mathfrak{G} durch die Matrix $(V(g_i, g_k)) = p^{-v_i} \mathfrak{B}$ bestimmt, wo die Elemente der „Verschlingungsmatrix“ $\mathfrak{B} \pmod{p^{v_1}}$ bestimmte ganze Zahlen sind. Die Zurückführung des Problems auf die Theorie der quadratischen Formen beruht auf dem folgenden Satze: Zwei Verschlingungen von \mathfrak{G} sind dann und nur dann isomorph, wenn ihre Verschlingungsmatrizen \mathfrak{B}_1 und \mathfrak{B}_2 bezüglich beliebiger Basen von $\mathfrak{G} \pmod{p^{v_1}}$ äquivalent sind, d. h. wenn es eine ganzzahlige Matrix \mathfrak{U} mit $\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{U} \mathfrak{B}_1 \mathfrak{U}' \pmod{p^{v_1}}$ gibt.

Herbert Seifert.

Borsuk, Karol: Set theoretical approach to the disconnection theory of the euclidean space. Fundamenta Math., Warszawa 37, 217—241 (1950).

L'A. donne en cet article une démonstration élémentaire du théorème de Brouwer: le nombre des composantes connexes du complémentaire d'un compact K dans R^{n+1} (ou S^{n+1}) est égal à $N + 1$, N désignant le rang du n° groupe de cohomologie de E (ou n° nombre de Betti de E); cette démonstration, fondée uniquement

sur la théorie des rétracts et sur une présentation élémentaire de la théorie du degré d'une application $f: S^n \rightarrow S^n$, évite tout appel à la théorie de la dualité, ainsi qu'à toute théorie de l'homologie.

René Thom.

Villegas Mañé, Cesáreo: Ein Satz über die lokale Inversion von Transformationen. Fac. Ing. Montevideo, Publ. Inst. Mat. Estadist. 2, 1—39 und engl. Zusammenfassg. 41 (1950) [Spanisch].

Der Punkt α von E heißt regulärer Punkt bei der Abbildung f des topologischen Raumes E in einen ebensolchen, wenn f in α stetig und in jedem von α verschiedenen Punkt einer gewissen Umgebung von α lokal topologisch ist. Aus Stoilowschen Untersuchungen (Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques, Paris 1938; dies. Zbl. 17, 378) folgt, daß, falls Urbild- und Bildraum im Kleinen der Euklidischen Ebene homöomorph sind, eine Abbildung $x = f(\xi)$ in einem regulären Punkt α mit der Transformation $z = \zeta^k$ im Punkt $\zeta = 0$ lokal äquivalent ist, wo z, ζ komplexe Variable und k eine natürliche Zahl bezeichnen. Hauptgegenstand der Arbeit ist eine Verallgemeinerung dieses Satzes für den Fall, daß der Bildraum E^n n -dimensional euklidisch, der Urbildraum E regulär topologisch und lokal kompakt ist, und das erste Hausdorffsche Abzählbarkeitsaxiom erfüllt: Sei α regulärer Punkt von $x = f(\xi)$. Zu jeder Umgebung U von α und V von $a = f(\alpha)$ gibt es eine offene Kugel $K \subset V$ um a und eine offene, in U enthaltene Umgebung U' von α , so daß $U' - \{\alpha\}$ in eine Summe von endlich vielen paarweise fremden Gebieten D_h , $h = 1, \dots, m$, zerfällt mit folgenden Eigenschaften: (1) Wenn $n \geq 3$, so bildet f jedes $B_h = D_h + \{\alpha\}$ topologisch auf K ab; (2) wenn $n = 2$, so ist $f|B_h$ mit einer analytischen Abbildung $z = \zeta^{k_h}$ im obigen Sinne lokal äquivalent; (3) für $n = 1$ wird jedes B_h auf ein halb abgeschlossenes Intervall abgebildet, dessen Endpunkt a ist. Nebenher teils als Hilfsbetrachtungen, teils als Anwendung werden auch Probleme der Überlagerung, Fortsetzung und Uniformisierung behandelt.

Georg Aumann.

● **Reidemeister, K.:** Einführung in die kombinatorische Topologie. New York: Chelsea 1950. X, 209 p.; \$ 6,00.

● **König, D.:** Theorie der endlichen und unendlichen Graphen. Kombinatorische Topologie der Streckenkomplexe. New York: Chelsea 1950. IX, 258 p.

Heawood, P. J.: Map-colour theorem. Proc. London math. Soc., II. S. 51, 161—175 (1949).

Man betrachte eine Parzellierung einer Kreisfläche, die — wie man das beim Vierfarbensatz immer voraussetzt — nur dreizeipflige Ecken aufweist und bei der darüber hinaus die Randzellen einen n -gliedrigen Zyklus bilden. Eine naheliegende Vermutung besagt, daß die bei Betrachtung sämtlicher Darstellungen der Parzellierung in vier Farben resultierende Anzahl der Färbungen dieses Randzyklus niemals abnimmt, wenn man die Zahl der Innenzellen durch Teilung vermehrt. Verf. prüft einige spezielle Fälle, wobei er sich einer Darstellung der Färbungen durch die drei Restklassen mod 3 bedient. Er faßt selbst seine Darlegungen nur als Anregung zu weiteren Forschungen auf.

Walter Brödel.

Klassische theoretische Physik.

Mechanik:

Kasner, Edward and John De Cicco: Physical families in conservative fields of force. Proc. mat. Acad. Sci. USA 35, 419—422 (1949).

In einem ebenen Gebiet \mathcal{G} sei ein Kraftfeld $\mathfrak{f}(x, y)$ gegeben. Die Gesamtheit der Kurven aus \mathcal{G} , auf denen eine solche erzwungene Bewegung möglich ist, daß der Normaldruck P proportional der Normalkomponente \mathfrak{f}_n wird, $P = k \mathfrak{f}_n$ (k eine von -1 verschiedene Konstante), bildet ein System S_k von ∞^3 Kurven. Ist das Kraftfeld konservativ, so besteht das allgemeinste System S_k aus den Extremalen

des Variationsproblems $\int (W + h)^{(k+1)/2} ds = \text{Min}$ (W die Kraftfunktion, h eine willkürliche Konstante). Bei konformer Abbildung gehen die S_k -Systeme im allgemeinen nicht wieder in S_k -Systeme über, vielmehr gibt es zu jeder nicht-homothetischen konformen Abbildung genau ein konservatives Kraftfeld, für welches dies der Fall ist. Entsprechende Ergebnisse für den Grenzfall $k = \infty$. *W. Rinow.*

Castro Brzezicki, A. de: Über die Bewegung eines Punktes variabler Masse. *Rev. mat. Hisp.-Amer.*, IV. S. 10, 233—237 (1950) [Spanisch].

Some elementary problems about the motion of a particle the mass of which decreases according to the exponential law $m = m_0 e^{-\mu t}$. *M. M. Peixoto.*

Castro Brzezicki, Antonio de: Bestimmung der Kräfte, die auf ein dynamisches System einwirken. *Gac. mat.*, Madrid 2, 229—236 (1950) [Spanisch].

Some classical problems are discussed by standard methods. *M. M. Peixoto.*

Manacorda, T.: Sul moto di un solido planare intorno ad un punto fisso. *Riv. Mat. Univ. Parma* 1, 382—391 (1950).

Der Schwerpunkt des starren Körpers liege in einer Hauptebene, die y -Achse sei die zu dieser senkrechte Hauptachse, die z -Achse gehe durch den Schwerpunkt. Für dieses Achsenkreuz sind die sechs Bewegungsgleichungen bekannt. Statt der dritten Eulerschen Winkelgeschwindigkeit r wird die Hessische Invariante s , eine lineare Kombination von r und p , eingeführt. Aus dem Energieintegral und den beiden ersten Eulerschen Gleichungen lassen sich die Richtungskosinusse des Schwerpunktes eliminieren, mit der dritten Eulerschen Gleichung die Zeit. Es entstehen zwei Differentialgleichungen zweiter Ordnung für p und q als Funktionen von s . Zu ihrer Lösung werden Potenzreihen in s angesetzt, die ersten Koeffizienten berechnet. Einige Sonderfälle sind zu beachten. *Georg Hamel.*

● **Oldenbourg-Sartorius:** Dynamik selbsttätiger Regelungen. I. München: R. Oldenbourg Verlag 1950. 112 Bilder, 1 Tafel. 258 S.

Die zweite Auflage des bekannten Buches stimmt im wesentlichen, von kleineren Berichtigungen abgesehen, mit der ersten Auflage (1944) überein. Nach einer Einführung werden in Kapitel II die wichtigsten mathematischen Grundlagen bereitgestellt. Die vollständige Berechnung von Ausgleichsvorgängen selbsttätiger Regelungen kann auf drei äußerlich etwas verschiedenen, aber im wesentlichen gleichwertigen Wegen erfolgen, 1. über eine lineare Differentialgleichung oder ein System solcher Gleichungen mit den Stabilitätskriterien nach Hurwitz, 2. mit Hilfe des Frequenzganges und dem Nyquistschen Stabilitätskriterium, 3. mit Hilfe der anschaulichen und als praktisches Hilfsmittel wichtigen Übergangsfunktion. Als mathematische Hilfsmethoden dienen die Laplace-Transformation, die Methode des komplexen Umkehrintegrals und Volterrasche Integralgleichungen. In Kapitel III (Stetige Regelungen) werden zunächst die wichtigsten Bestandteile eines Regelkreises besprochen, wobei der Haupteinteilungsgesichtspunkt ist: statisch und astatisch wirkende Systeme; jedoch lassen sich nicht alle Geräte zwanglos in diese beiden Gruppen einordnen; so werden insbesondere die Stabilisierungsrichtungen gesondert besprochen; im zweiten Teil von Kap. III werden spezielle Regelkreise untersucht, wobei nicht Vollständigkeit erstrebt werden konnte, sondern einzelne Bestandteile, die jeweils für eine ganze Gruppe von Geräten typisch sind herausgegriffen werden. Es werden Regelkreise mit statischem Verhalten, mit Laufzeiten, mit Rückführung und mit differenzierenden Organen behandelt. Ein kurzes Kapitel bringt Nichtlinearitäten, ihre Entstehung (zum Beispiel durch Ansprechempfindlichkeit, Reibung und Lose) und ein Zahlenbeispiel; Kapitel V befaßt sich mit den in der Praxis oft vorkommenden unstetigen Regelungen (unstetige Arbeitsweise), mit den wichtigsten Arten der Ein-Aus-Regeler und der Schrittregeler. Als wichtiges mathematisches Hilfsmittel werden die Differenzengleichungen und Systeme solcher Gleichungen ausführlich besprochen. Ein Abschnitt über spezielle Regelkreise gibt wie in Kap. III eine Auswahl typischer Beispiele mit

aufzeit, mit differenzierendem Meßgerät und mit nachgebender Rückführung. In kurzer Abschnitt (Kap. VI) über die zweckmäßige Anwendung der verschiedenen Regelungsarten wird vom Praktiker besonders begrüßt werden. Es folgen zwei mathematische Anhänge über Laplacetransformation und Differenzenrechnung. Das Buch zeichnet sich durch eine große Anzahl von graphischen Darstellungen, Schaubildern und übersichtlichen Tabellen aus.

Lothar Collatz.

Nadile, Antonio: *Influenza di vincoli anolonomi sullo spostamento di equilibrio di un sistema.* Riv. Mat. Univ. Parma 1, 393—399 (1950).

Theorem: Wenn ein konservatives System von n Freiheitsgraden an sich eine stabile Lage \mathfrak{C}_0 besitzt und nun $m < n$ nichtholonomen Bedingungen unterworfen wird, so hat es i. A. in einer Umgebung erster Ordnung zu \mathfrak{C}_0 noch m stabile Lagen, die von m unendlich kleinen willkürlichen Konstanten abhängen.

Georg Hamel.

Zeuli, Tino: *Generalizzazione del metodo di Newcomb per lo studio delle vibrazioni pseudoarmoniche.* Atti Accad. Sci. Torino, Cl. I 84, 31—40 (1950).

Es handelt sich um die Integration einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, die nicht linear ist, bei der vielmehr das Kraftglied in eine Potenzreihe der Koordinate entwickelbar ist. Nach dem bekannten Weierstraßschen Satz existiert eine periodische Lösung, deren Periode aber zunächst noch unbekannt ist und daher eine Transformation der Zeit mit einem unbekannten Faktor nötig macht. Die Lösung der Differentialgleichung wie auch der eingeführte Zeitparameter werden in Potenzreihen nach den Anfangswerten entwickelt. Es ergeben sich rekurrente Gleichungen, die ersten Glieder werden ausgerechnet.

Georg Hamel.

Elastizität. Plastizität:

Signorini, Antonio: *Un semplice esempio di „incompatibilità“ tra la elastostatica classica e la teoria delle deformazioni elastiche finite.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 8, 276—281 (1950).

Kritische Beleutung der fundamentalen Hypothese der klassischen Elastizitätstheorie, daß die Verschiebungs- und Spannungskomponenten Reihenentwicklungen zulassen, von denen grundsätzlich nur die linearen Glieder beibehalten werden, auf Grund der Annahme der Existenz eines elastischen Potentials als Funktion der Verzerrung. Die Theorie endlicher Formänderungen liefert für die höheren Glieder Systeme von Differentialgleichungen, die gewissen Integrabilitätsbedingungen unterworfen sind. Diese Bedingungen bestehen nicht immer nur in der Forderung einer geeigneten Rotation des ganzen Systems. Es gibt, wie am Beispiel eines Parallelepipeds gezeigt wird, dessen Seitenflächen einem geeigneten System von Biegespannungen unterworfen wird, auch Fälle, in denen sich die Verträglichkeitsbedingungen für die quadratischen Glieder der Reihenentwicklung des Verschiebungsvektors nicht erfüllen lassen. Daraus wird geschlossen, daß die stillschweigende Annahme der Existenz solcher formaler Reihenentwicklung, unabhängig von allen Konvergenzfragen, nicht zulässig ist. Dieser Sachverhalt wird vom Verf. als „Unverträglichkeit“ bezeichnet.

Ruth Moufang.

Aquaro, Giovanni: *Un teorema di media per le equazioni dell'elasticità.* Riv. Mat. Univ. Parma 1, 419—424 (1950).

Nachdem die statisch-elastische Verschiebung gemäß der klassischen Elastizitätstheorie durch vier harmonische Funktionen dargestellt worden ist, gelingt es, die Verschiebung im Mittelpunkt einer Kugel durch ein Integral über die Oberfläche der Kugel darzustellen, dessen Integrand eine affine Transformation der Verschiebung auf der Oberfläche ist, deren Matrix lediglich durch die geometrischen Vektoren und die Konstanten des Elastizitätsgesetzes gegeben ist.

Georg Hamel.

Iacovache, Maria: Über Beziehungen zwischen den Spannungen in einem elastischen Körper in Bewegung. Acad. Republ. popul. Române, Bul. Şti. A 2, 699—705, russische und französ. Zusammenfassg. 706 und 707 (1950) [Rumänisch].

Moisil, Gr. C.: Bemerkung zu der vorangehenden Note. Acad. Republ. popul. Române, Bul. Şti. A 2, 705—706 (1950) [Rumänisch].

En employant la méthode de Gr. C. Moisil, M. Iacovache trouve, dans le cas des petits mouvements d'un corps élastique isotrope, une base

$$\varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \dots$$

des relations entre u , v et w , qui est le système bien connu de Lamé. — La recherche des relations différentielles entre les tensions, ramenée à la base

$$(4) \quad \varrho \frac{\partial^2 \tau_x}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \tau_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right), \dots$$

$$(6) \quad \lambda \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \sigma_x + 2(3\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \tau_x}{\partial y \partial z} = \left[2(\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \lambda \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \sigma_y + \left[2(\lambda + \mu) \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \lambda \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \sigma_z, \dots$$

$$(7) \quad 2(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y \partial z} - \lambda \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\sigma_y + \sigma_z) + (3\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \tau_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_z}{\partial z} \right) = 0, \dots$$

$$(8) \quad \varrho \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_z}{\partial y} + \frac{\partial \tau_y}{\partial z} \right) + \lambda \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \tau_z}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_x}{\partial z} \right) + \lambda \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right), \dots$$

montre que toutes les relations entre $\sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_z$ qu'on peut déduire des équations de mouvement et de la loi de Hooke, sont les conséquences différentielles du système (4), (6), (7) et (8). (Autoreferat.)

Uffjand, Ja. S.: Die Integralgleichung der Verbiegung einer sektorförmigen Platte mit eingespannten Radien. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 72, 251—254 (1950) [Russisch].

Der in Polarkoordinaten r, ϑ ausgedrückte Ansatz $w = \sum_{n=0}^{\infty} W(r) \cos \frac{n\pi\vartheta}{2\gamma}$ für die Durchbiegung einer in $\vartheta = 0, 2\gamma$ eingespannten Kreissektorplatte führt in Verbindung mit der Differentialgleichung der Plattenbiegung und den vorgeschriebenen Grenzbedingungen längs des Randes $r = R$ zu einer Lösung für $w(r, \vartheta)$, die neben der gegebenen Belastung der Platte noch zwei unbekannte Funktionen $f_0(r)$, $f_{2\gamma}(r)$ zur Darstellung von Auflagerreaktionen längs der Plattenränder $\vartheta = 0, 2\gamma$ enthält. Die Bedingung $w = 0$ für diese beiden Ränder führt nun im Falle von Symmetrie der Belastung auf eine Integralgleichung für die Funktion $f_0(r) = f_{2\gamma}(r)$. Die Fixierung eines ganzen Randes wird näherungsweise durch Festhalten eines einzigen Punktes $r = R/2$ ersetzt, womit sich die wirkliche Auflösung der Integralgleichung umgehen läßt. Die Lösung wird unter der Annahme einer Einspannung längs $r = R$ und für Zentriwinkel $2\gamma = \pi/4, \pi/2, \pi$ ausgewertet. Angegeben sind numerische Werte für das Spannungsmoment in der Mitte des Randes $r = R$, sowie für den Biegepfel der Platte in folgenden Belastungsfällen: (a) gleichförmige Belastung der Platte; (b) Punktlast in Plattenmitte; (c) Linienlast längs des Bogens $r = R/2$.

Uffjand, Ja. S.: Über einen Fall der Verbiegung einer rechteckigen Platte Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 72, 655—657 (1950) [Russisch].

Verf. untersucht die Biegung einer längs $x = 0, a$, sowie längs $y = b$ eingespannten, längs $y = 0$ frei aufliegenden Rechteckplatte. Die Differentialgleichung der Plattenbiegung wird integriert unter Verwendung des Levyschen Ansatzes $w = \sum_{n=0}^{\infty} W_n(y) \cos \frac{n\pi x}{a}$ und unter Einhaltung aller vorgeschriebenen Grenz-

dingungen längs der Ränder $y = 0, b$, wobei die Störungsfunktion der Differenzgleichung außer der gegebenen Plattenbelastung noch zwei unbekannte reaktive Randlasten längs der Ränder $x = 0, a$ enthält. Bei Ausnutzung von Symmetrie bzw. Antimetrie der Belastung hinsichtlich $x = a/2$ führen die Grenzbedingungen $w = 0$ für $x = 0, a$ auf eine Integralgleichung für jede der unbekannten Funktionen, die den Verlauf der Randscherkräfte darzustellen haben. Fixiert man nur einzelne Randpunkte, so reduziert sich die Integralgleichung auf ein System algebraischer Gleichungen. Als Beispiel wird die quadratische Platte durchgerechnet und dabei an der Seitenmitte ($y = b/2$) festgehalten. Man findet einige numerische Angaben über Biegemomente und Randkräfte für die folgenden Anordnungen der Belastung: a) gleichförmige Belastung der Platte; b) gleichförmige Linienlast längs $y = b/2$; c) Punktlast in Plattenmitte.

S. Woinowsky-Krieger.

Levi, Franco: Superfici d'influenza e fenomeni di adattamento delle lastre elastiche. Atti Accad. Sci. Torino, Cl. I 84, 86—93 (1950).

Es handelt sich um die Bestimmung der Einflußflächen und um die Anpassung an die gegebene Verformung dünner ebener Platten, denen bestimmte unelastische Verformungen ihrer Oberflächen erteilt werden. Die erhaltenen Ausdrücke werden nach Marcus in die Form einer Differenzgleichung gebracht und angenähert durch die Lösung der folgenden Aufgaben verwendet: 1. Bestimmung der Einflußflächen in der elastischen Platte unter Anwendung des zweiten Reziprozitätsprinzips und der Verzerrungen (distorsioni) von Somigliana und 2. für die angenäherte Untersuchung der Erscheinungen der Anpassung im Hinblick auf die Elastizitätseigenschaft des Plattenmaterials und auf die Fragen der Sicherheit. Als analytische Hilfsmittel dienen die Kirchhoffschen Gleichungen, in denen als Verformungen die Summen der elastischen und unelastischen Anteile eingeführt werden. *Theodor Pöschl.*

Grigoljuk, E. I.: Angenäherte Lösung des Problems der Stabilität eines Ringes unter Torsion. Priklad. Mat. Mech., Moskva 14, 99—101 (1950) [Russisch].

Die Galerkinsche Methode wird vom Verf. auf das Stabilitätsproblem einer Ringplatte angewendet, die durch gleichförmig über ihre beiden Ränder verteilte, in der Ebene der Platte wirkende Schubkräfte belastet wird. Der gewählte Ansatz für die Durchbiegung entspricht einer starren Einspannung der beiden Ränder und enthält außer einer angenommenen Anzahl von Beulungswellen einen weiteren Parameter. Nach Aufstellung und Auswertung der Beulbedingung werden diejenigen Parameterwerte gewählt, die die kleinste kritische Schubbelastung ergeben. Die beigefügte Tabelle enthält neben den Beulkräften die jeweilige Wellenzahl für verschiedene Verhältnisse l der beiden Grenzradien der Ringplatte. Die Abweichung der so berechneten ersten Näherungswerte der Beulbelastung von den Ergebnissen der strengen Lösung (nach Dean bzw. nach Sokoloff) beträgt 12 % für $l = 0,1$, 2 % für $l = 0,2$.

S. Woinowsky-Krieger.

Muštari, Ch. M.: Qualitative Untersuchung des Spannungszustandes einer elastischen Schale bei kleinen Deformationen und beliebiger Verschiebung. Priklad. Mat. Mech., Moskva 13, 121—134 (1949) [Russisch].

Ausgehend von den allgemeinen Grundgleichungen der Schalentheorie werden für verschiedene Aufgabentypen der linearen und nichtlinearen Theorie vereinfachte Grundgleichungen abgeleitet, indem alle Größen von derselben Ordnung wie die elastische Dehnung gegen Eins vernachlässigt werden. Die Klassifikation der Aufgaben geht aus von den geometrischen Eigenschaften der Schalen (endlicher, kleiner und sehr kleiner Krümmung) und von den angenommenen Verformungen (kleine, mittlere und große Durchbiegungen). Als letzter Typ wird das Problem des Randeffektes besprochen, welches dadurch ausgezeichnet ist, daß in diesem Falle die Annahme, die Verformungen und Spannungen seien von derselben Größenordnung wie ihre Ableitungen nach den Koordinaten, unzulässig ist.

A. Kromm.

Bunič, L. M.: Über ein Funktional zur Lösung des Stabilitätsproblems dünner Schalen. *Priklad. Mat. Mech.*, Moskva 14, 670—671 (1950) [Russisch].

In der Arbeit wird auf die an sich bekannte Tatsache hingewiesen, daß bei Stabilitätsaufgaben die Minimalbedingung für die quadratischen Glieder in der Änderung des elastischen Potentials beim Übergang vom Grund- zum Nachbarzustand dann zu falschen Ergebnissen führt, wenn die äußeren Kräfte nicht unabhängig von der Deformation des Körpers sind, und daß in diesen Fällen die Arbeit der äußeren Kräfte, die dem Nachbarzustand entsprechen, berücksichtigt werden muß. Das wird am Beispiel eines Ringes mit hydrostatischer Belastung illustriert.

A. Kromm.

Vekua, I. N.: Zur Theorie der elastischen Schalen. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. S. 68, 453—455 (1949) [Russisch].

Es werden die statischen Gleichungen der Schalentheorie in komplexer Form für ein isothermisches Koordinatennetz angeschrieben und aus ihnen mit Hilfe eines angenäherten Elastizitätsgesetzes für flache Schalen vereinfachte Differentialgleichungen für die Verschiebungen abgeleitet.

A. Kromm.

O'Rourke, R. C. and A. W. Saenz: Quenching stresses in transparent isotropic media and the photoelastic method. *Quart. appl. Math.* 8, 303—311 (1950).

Der Zweck dieser Note ist ein dreifacher: (1) Eine mathematische Theorie der Restspannungen zu entwickeln, die auf ein einfaches Modell des Abschreckvorganges (plötzliche Abkühlung von T_1 auf T_0 , $T_1 > T_0$) gegründet ist, auf Grund einer klassischen Theorie von Lord Rayleigh (s. *Collected Papers*, vol. 4, S. 402). — (2) Prüfung der Verwendung der photoelastischen Methode zur Untersuchung des Abschreckvorganges mit besonderer Rücksicht auf Glas. — (3) Die Erkenntnis, daß das Problem der Verteilung von photoelastischen Spannungen in symmetrisch abgeschreckten Kugeln und Zylindern ein einfaches Problem darstellt, das auf Abel-sche Integralgleichungen zurückführbar ist. Diese Integralgleichungen werden durch eine Reihenentwicklung gelöst.

Theodor Pöschl.

Lighthill, M. J. and F. J. Bradshaw: Thermal stresses in turbine blades. *Phil. Mag.*, J. theor. exper. appl. Phys., London, VII. S. 40, 770—780 (1949).

Theorie der Wärmespannungen in Turbinenschaufeln unter der Näherungsannahme, daß in jedem Punkte der Schaufel die Spannungen angenähert gleich jenen sind, die in einer unendlichen Platte von gleichförmiger Dicke auftreten würden, die gleich der Dicke in dem betreffenden Schaufelpunkte ist. Die Maxima der Spannungen sind verkehrt proportional der Temperaturleitfähigkeit für die niedrigen Übergangsbereiche, aber weniger empfindlich für höhere. Zum Schluß wird eine Anwendung auf ein besonderes Material und Vergleich mit Versuchen gegeben.

Theodor Pöschl.

Gordon, A. N. and K. H. Swainger: A linear theory of finite strain. *Nature*, London 166, 657—659 (1950).

Der Einwurf Gordons, daß die Swaingersche Definition der Verzerrung nur sinnvoll ist für Deformationen, bei denen die Hauptachsen nicht drehen, wird von Swainger als ein Mißverständnis seiner Theorie dargestellt, indem er zwischen „whole-body convected“ und „locally convected“ Koordinatenachsen unterscheidet und die Beziehung zwischen den Verschiebungen, bezogen auf das erste und auf das zweite Koordinatensystem, näher präzisiert.

Ruth Moufang.

Kármán, Theodore von and Pol Duwez: The propagation of plastic deformation in solids. *J. appl. Phys.*, Lancaster Pa. 21, 987—994 (1950).

Die Untersuchung über die Fortpflanzung von plastischen Verformungen wurde schon 1941 in Angriff genommen u. zw. im Hinblick auf die Frage des Widerstandes von Bauwerken gegenüber stoßenden Lasten bei Überschreitung der Elastizitätsgrenze. Dabei wurde der Begriff der plastischen Verformungswelle entwickelt, der dazu dienen sollte, die aufgenommene Energie bei verschiedenen Baugliedern wie

ulen, Balken, Platten und dgl. zu berechnen. — Zwei Methoden stehen zur Verfügung: Die Biegung von gekerbten Stäben und Zug oder Druck bei kurzen zylindrischen Stäben. Beide haben gezeigt, daß für nicht zu große Stoßgeschwindigkeiten beim Stoß aufgenommene Arbeit i. a. etwas größer ist als die bei statischen Versuchen. Die Fortpflanzung plastischer Wellen ist wohl bekannt. Die hier behandelte Aufgabe besteht vor allem darin, die Geschwindigkeit c_1 der plastischen Welle und die größte Dehnung ε_1 als Funktion der Stoßgeschwindigkeit v_1 zu bestimmen. Für die Darstellung der Ergebnisse werden zwei „Pläne“ angegeben; der erste verwendet nach Lagrange — x und t als Koordinaten, der zweite — der Geschwindigkeiten — $\Phi(\varepsilon)$ und v . Die verwendete Versuchstechnik und die erhaltenen Ergebnisse werden eingehend beschrieben.

Theodor Pöschl.

White jr., G. N. and D. C. Drucker: Effective stress and effective strain in relation to stress theories of plasticity. J. appl. Phys., Lancaster Pa. **21**, 1013—1021 (1950).

Es werden Definitionen für die Begriffe „effektive Spannung“ ($\bar{\sigma}$) und „effektive Dehnung“ ($\bar{\varepsilon}^P$) gegeben zum besseren Verständnis der Verfahren über das Verhalten von isotropen und anisotropen arbeits-härtenden Werkstoffen. Als Grundlage dienen die neueren Spannungs-Theorien über das plastische Verhalten der Stoffe. Eine dieser Theorien nimmt an, daß die bei der Härtung dissipierte Arbeit allein vom Spannungszustand am Ende der mit der Härtung verbundenen Formänderung abhängt und nicht vom Wege, und die andere erfolgt auf Grund der Spannungs-Dehnungs-Relationen. Für viele Zwecke erweist sich die von J. E. Dorn (ies. Zbl. **34**, 410) gegebene Definition der effektiven Dehnung als befriedigend. Weitere experimentelle Untersuchungen werden jedoch als notwendig angesehen.

Theodor Pöschl.

Mises, R. v.: Three remarks on the theory of the ideal plastic body. Reissner Annivers. Vol., Contr. appl. Mech., Ann Arbor, Mich., 415—429 (1949).

Anläßlich einer Plastizitätstagung an der Brown-University veröffentlichte Verf. folgende drei Bemerkungen zur idealen Plastizitätstheorie. Die gemischt elastisch-plastische Torsionsspannungsverteilung läßt sich als Umkehrproblem behandeln, wobei man von einer bekannten Lösung des elastischen Torsionsproblems ausgeht und die Gültigkeit dieser Lösung bis zu einer Begrenzungslinie bestehen läßt, längs welcher die resultierende Schubspannung einen konstanten Betrag annimmt. Jenseits dieser Grenze schließt sich ein Feld konstanter Schubspannung an, dessen Spannungslinien Äquidistanten darstellen. Verf. gibt zwei Beispiele an: Das gleichseitige Dreieck und die Ellipse. — Die zweite Bemerkung bezieht sich auf dickwandige, zylindrische Rohre unter Innen- und Außendruck. Bei Anwendung der Gestaltänderungshypothese besteht zwischen den Spannungen eine elliptische Beziehung; Verf. schlägt zur Lösung eine besondere Substitution vor und gibt die Spannungsverteilung für ein Beispiel an. — Die dritte Bemerkung bezieht sich auf die Linearisierung des ebenen Spannungsproblems, wobei Verf. auf die Charakteristikenmethode hinweist. [Ein ähnliches Verfahren wurde vom Ref. durch Einführung der sogenannten „Plastizitätsfläche“ entwickelt, wobei sich eine einfache zeichnerische Methode ergab, s. dies. Zbl. **30**, 376; Bemerkung des Ref.] *H. Neuber.*

Nádai, A.: Theory of the plastic distortion of thick-walled cylinders. Reissner Annivers. Vol., Contr. appl. Mech., Ann Arbor, Mich., 430—448 (1949).

Im Anschluß an frühere eigene Arbeiten des Verf. sowie weitere amerikanische, englische und russische Veröffentlichungen wird das Plastizitätsproblem des dickwandigen Zylinders unter Innen- und Außendruck sowie Torsionsbeanspruchung hinsichtlich Spannungsverteilung und Verformung weitgehend durchgerechnet, wobei auch die Verzerrungsgeschwindigkeiten angegeben werden. Die Aussage über die für den Bruch maßgebliche äußere Belastung wird aus einer Stabilitätsbetrachtung des Verformungsvorganges gewonnen.

H. Neuber.

Odqvist, Folke K. G.: Plasticity applied to the theory of thin shells and pressure vessels. Reissner Annivers. Vol., Contr. appl. Mech., Ann Arbor, Mich., 449—460 (1949).

Plastizitätserscheinungen sind im Schalenbau die Ursache einer wesentlichen Veränderung der Spannungsverteilung. Verf. behandelt die teilweise Plastizierung von dünnen Rotationschalen in ihrem Einfluß auf die Anschlußbedingungen beim Übergang zwischen der zylindrischen Wandung und dem Boden. Für das Fließgebiet wird die Schubspannungshypothese angenommen. Bei Anwendung auf den zylindrischen Behälter mit kugelförmigem Boden können zwar die Lösungen der bekannten Differentialgleichungen der Zylinder- und Kugelschale beibehalten werden. Jedoch muß die im elastischen Bereich geltende Einspannbedingung des Schalenrandes an der Übergangsstelle durch die Bedingung des maximalen Schalenbiegemomentes (mit Bezug auf die Fließspannung des Werkstoffes) ersetzt werden, wobei ein Sprung der Radialverschiebung und des Drehwinkels der Meridiantangente auftritt.

H. Neuber.

Swida, W.: Die Plattengleichungen für den elastisch-plastischen Zustand. Z. angew. Math. Mech. 30, 375—381 (1950).

Die Arbeit stellt einen Abschnitt aus der Habilitationsschrift des Verf. an der Technischen Hochschule Karlsruhe dar (dies. Zbl. 32, 89, 33, 410, 38, 112 und Z. Bautechnik 1950, H. 10). Es werden die üblichen Annahmen und für den Eintritt der plastischen Formänderungen die Annahme eines Grenzfalles für die Gestaltänderungsarbeit nach Mises-Hencky eingeführt. Die Annahme kleiner Durchbiegungen stellt jedoch für die plastische Zone einen Widerspruch gegen die dort vorliegenden Verhältnisse dar. Die Form der Grenzfläche zwischen dem elastischen und plastischen Bereiche ist angebbar, sobald die Biegefläche bekannt ist. Einige Sonderfälle werden behandelt.

Theodor Pöschl.

Popov, S. M.: Über die zylindrische Form des Stabilitätsverlustes von Platten jenseits der Elastizitätsgrenze. Priklad. Mat. Mech., Moskva 14, 543—552 (1950) [Russisch].

Verf. gibt hier eine strenge Lösung für das bereits von A. Il'jušin (Plastizität 1948) behandelte Problem der Beulung einer in ihrer Ebene gleichförmig zusammengeprägten Platte. Die Lösung geht aus von einer zylindrischen Beulfläche, deren Erzeugenden normal zu der Druckrichtung liegen, so daß eine dieser Erzeugenden die rein plastische Zone von der elastisch-plastischen abgrenzt. Die von Il'jušin übernommenen Differentialgleichungen der Plattenstabilität führen in Verbindung mit den Rand- und Übergangsbedingungen zu einem System von drei Gleichungen für die folgenden Unbekannten: 1. Grenze der beiden Zonen; 2. Größte Tiefe der von der Plattenausbiegung herrührenden einseitigen elastischen Schicht; 3. eine charakteristischen Parameter für den kritischen Druck bzw. die kritische Biegsamkeit der Platte. Die Beziehung zwischen diesen drei Größen wird durch eine numerische Tafel dargestellt.

S. Woinowsky-Krieger.

Symonds, P. S.: The basic theorems in the plastic theory of structures. J. aeronaut. Sci., Easton, Pa. 17, 669—670 (1950).

Thomson, William T.: The equivalent circuit for the transmission of plane elastic waves through a plate at oblique incidence. J. appl. Phys., Lancaster Pa. 21, 1215—1217 (1950).

Es werden Beziehungen für die Übertragung ebener elastischer Wellen durch eine Platte mit verschiedenen Flüssigkeiten auf beiden Seiten bei gegebenem Einfallswinkel aufgestellt. Infolge der Randbedingungen bilden sich in der Platte sowohl Dilatations- als auch Schubwellen aus. Das Problem läßt sich auf ein einfaches elektrisches Modell zurückzuführen, dessen Impedanzen Funktionen des Einfallswinkels sind.

H. Neuber.

Colombo, Giuseppe: Sulla stabilità delle configurazioni di equilibrio di una superficie flessibile ed inestendibile. Rend. Sem. mat. Univ. Padova 19, 214—230 (1950).

Beltrami (Ges. Werke III S. 420—464) hatte in einer Untersuchung über das Gleichgewicht verbiegbarer, undehnbarer Oberflächen behauptet, daß „im Allgemeinen“ in einer Gleichgewichtskonfiguration nur innere Zugspannungen auftreten können, und hatte diese Aussage dann ohne nähere Präzisierung dahin erweitert, daß unter Umständen auch Gleichgewichtszustände mit negativen Spannungen verträglich sein können. Als stabile Gleichgewichtslage werde eine solche bezeichnet, die infinitesimale, mit den Randbedingungen verträgliche Schwingungen in die Gleichgewichtskonfiguration zuläßt; als absolut stabil eine solche Gleichgewichtslage, bei der alle inneren Spannungen Zugspannungen sind. Im Anschluß an drei Arbeiten von E. Laura [Atti 2. Congr. Un. Mat. Ital. 346—352 (1942); Rend. Semi. mat. Univ. Padova 11, 113—131 (1940); Atti Ist. Veneto Sci. Lett. 99, 339—356 (1940); dies. Zbl. 27, 16, 25, 119, 27, 16] über das Gleichgewicht zylindrischer Flächenstücke, die dadurch entstehen, daß eine vollkommen biegsame undehbare Haut an gleichlangen Stücken von zwei Erzeugenden befestigt ist und mit symmetrischen freien Rändern infolge der Schwerkraft zwischen den befestigten Rändern frei durchhängt, zeigt Verf. an einem konkreten Beispiel, daß es solche zylindrischen Flächenstücke gibt, die sich in stabilem, aber nicht absolut stabilem Gleichgewicht befinden. Das wesentliche Hilfsmittel seiner Untersuchungen ist die Diskussion des negativ-definiten Charakters einer quadratischen Form; ihre Verderblichen sind die partiellen Ableitungen einer Funktion der beiden Flächenparameter. Weil diese Funktion nicht willkürlich, sondern durch die elastischen Grundgleichungen und die Randbedingungen des Problems eingeschränkt ist, kann diese quadratische Form u. U. auch negativ-definit sein, ohne daß die üblichen Koeffizienten-Ungleichungen erfüllt sind; diese Ungleichungen sind gerade der Ausdruck für die absolute Stabilität des Gleichgewichts. Der negativ-definite Charakter der quadratischen Form sichert andererseits das Auftreten rein imaginärer Eigenwerte eines gewissen Sturm-Liouvilleschen Eigenwertproblems, so daß sich für die virtuelle Verschiebung ein Schwingungsvorgang ergibt.

Ruth Moufang.

Fognolo-Massaglia, Bruna: Sul moto di una sfera elastica. Atti Accad. Sci. Torino, Cl. I 84, 19—30 (1950).

Nach derselben Methode, wie sie Einaudi für das Problem der schwingenden Kugel bei gegebenen Verschiebungen am Rande angewendet hat (dies. Zbl. 23, 183), wird hier das Problem für den Fall durchgerechnet, daß die Spannungen an der Oberfläche der Kugel gegeben sind. Das naheliegende Hilfsmittel ist eine Entwicklung nach Kugelfunktionen.

Georg Hamel.

Haar, D. Ter: A phenomenological theory of visco-elastic behaviour. I. Physica, The Hague 16, 719—737 (1950).

Bei seinen Untersuchungen über das Verhalten hochpolymerer visco-elastischer Substanzen ist R. Sips [J. Polymer. Sci. 5, 69 (1950)] von einem wohldefinierten Modell ausgegangen, das aus parallelen Maxwellschen Elementen besteht. Die Reihe dieser Arbeiten des Verf. überträgt diese Methode auf eine Anzahl von vereinfachten Modellen und diskutiert für diese die Beziehungen zwischen den verschiedenen Meßmethoden. Zunächst werden in I kurz die Gleichungen zusammengestellt, die in den folgenden Abschnitten gebraucht werden und die auf Maxwell, Boltzmann und Lord Kelvin zurückgehen. Aus diesen werden Näherungsformeln für den Fall kleiner Deformationen abgeleitet und in ihrer vom Verf. gegebenen Form an moderne Vorstellungen der Quantenmechanik angeschlossen.

Theodor Pöschl.

Haar, D. Ter: A phenomenological theory of visco-elastic behaviour. II. Physica, The Hague 16, 738—752 (1950).

In diesem Teil der Reihe (vgl. vorsteh. Referat) wird die allgemeine Theorie weiterentwickelt und auf die experimentell gefundenen Ergebnisse angewendet. Im Abschnitt 1 wird der Einfluß endlicher Perioden der Beanspruchung von einer Relaxation oder einem Kriechversuch diskutiert; in 2 wird eine Näherungsmethode zur Gewinnung einer rohen Einsicht in das Relaxationsspektrum beschrieben. Die hierauf bezüglichen Verfahren werden in den folgenden Abschnitten weiter verfeinert und die Bestimmung der Streckgrenze bei genaueren Versuchen beschrieben

Theodor Pöschl.

Hydrodynamik:

• Andelič, Tatomir P.: *Foundations of the mechanics of continuous media*. Belgrade: Naučna Knjiga 1950. VII, 231 p. [Serbo-kroatisch].

Weissing, Johannes: *Über eine Erweiterung der Prandtl'schen Theorie der tragenden Linie*. Math. Nachr., Berlin 2, 45—106 (1949).

Zur Berechnung der Auftriebsverteilung, des Widerstandes und des Momentes eines rechteckigen Tragflügels nach einem vereinfachten Verfahren der tragenden Fläche wird die Tragfläche mit einer Wirbelverteilung $\gamma(x, y)$ belegt gedacht, wobei x die Koordinate in der Richtung der Anblasung und y die Koordinate in der Richtung senkrecht dazu ist. Der Ansatz, daß der induzierte Abwind

$$-v_z(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_{-t/2}^{t/2} \int_{-b/2}^{b/2} \left\{ \frac{1}{y-\eta} + \frac{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}{(x-\xi)(y-\eta)} \right\} \frac{\partial \gamma(x, y)}{\partial \eta} d\xi d\eta$$

(t = Tiefe, b = Spannweite) an der Stelle x, y gleich der Normalkomponente $V_n(x, y)$ der Anblasung am Flügel ist, führt auf eine komplizierte singuläre Integralgleichung. — Diese Gleichung wird einer bequemen mathematischen Behandlung durch die Näherungsbetrachtung zugänglich gemacht, daß die Zirkulationsverteilung über die Tiefe des Tragflügels vorgegeben wird und dann noch lediglich die Verteilung über die Spannweite berechnet wird. Die Bedingung, daß $-v_z(x, y) = V_n(x, y)$ sein soll, läßt sich dann nur noch in einem bestimmten Spannweiten-

schnitt erfüllen. Es wird gezeigt, daß man zweckmäßigerweise $\gamma(x, y) = \frac{2}{\pi t} \sqrt{\frac{t/2 - \xi}{t/2 + \xi}} \Gamma(y)$ setzt. Das ist die Zirkulationsverteilung des Streckenprofils im ebenen Fall. Die Abwindbedingung wird lediglich an der hinteren Neutralpunktlinie, d. h. in $3/4$ Flügeltiefe erfüllt. Diese Annahme ist durch Näherungsbetrachtungen von Pistolesi gerechtfertigt. Es ergibt sich dann für $\Gamma(y)$ eine Integro-Differentialgleichung von etwas komplizierterer Gestalt als die bekannte Prandtl'sche Gleichung. Zur numerischen Auflösung wird eine Modifikation des Multhopp-Verfahrens herangezogen. — Das eben geschilderte Verfahren der tragenden Fläche wird vom Verf. noch weiter zu einem Verfahren der tragenden Linie vereinfacht. Es wird angenommen, daß die über die Tiefe verteilten tragenden Wirbel auf der $t/4$ -Linie zusammengezogen werden, wobei die Zirkulationsverteilung $\Gamma(y)$ wieder so bestimmt wird, daß die von diesem Wirbelsystem induzierte Normalkomponente auf der $\frac{3}{4}t$ -Linie entgegengesetzt gleich der Anblasungskomponente ist. Es lassen sich mit diesem Modell auch leicht nicht-rechteckige Tragflügel behandeln. Die Integralgleichung für die Zirkulationsverteilung vereinfacht sich noch. Die angeführten beiden Modelle lassen sich nun auch zur Behandlung des schiebenden und des gepfeilten Tragflügels verwenden, und hierin liegt ihre besondere Bedeutung. Das übliche Modell der tragenden Linie versagt hier, da die freien Wirbel wegen der Schrägstellung unmittelbar an der tragenden Linie Singularitäten liefern. Der schiebende Flügel läßt sich nach beiden geschilderten Verfahren behandeln, da in beiden Fällen keine Singularitäten mehr auftreten. Das Verfahren der tragenden Fläche läßt sich dagegen im Gegensatz zu dem angegebenen Verfahren der tragenden Linie nicht unmittelbar zur Behandlung des Pfeilflügels verwenden, da die Singularität an der Knicke stelle nicht beseitigt ist. Verf. umgeht aber auch in diesem Fall die Schwierigkeit, indem er annimmt, daß die von den tragenden Wirbeln hervorgerufene Singularität durch eine entsprechende Singularität der abgehenden Wirbel wieder aufgehoben wird. — Es wird für eine gerade $t/4$ -Linie ein Vergleich mit der Prandtl'schen Traglinientheorie angestellt. Es ergibt sich eine Verkleinerung des c_a -Wertes besonders bei kleineren Werten des Streckungsverhältnisses Λ . Bei dünnen Profilen wird das durch den Versuch bestätigt. Für das durch V -Stellung verursachte Schieberollmoment für den rechteckigen Flügel mit $\Lambda = 5$ ergibt die neue Theorie gegenüber der alten eine Verkleinerung von 15%. Die Messung ergibt eine Verkleinerung von 18%. Schließlich wurden gepfeilte Flügel berechnet. c_a wird durch Pfeilung kleiner. Das Experiment gibt hier nur 60—70% der theoretischen Änderung; überhaupt scheint die Theorie den Pfeilungseinfluß etwas zu stark wiederzugeben.

Kurt Schröder.

Goland, Martin: Stick-fixed, short-period stability based on the Wagner air forces. Reissner Annivers. Vol., Contr. appl. Mech., Ann Arbor, Mich., 111—124 (1949).

Vom Ref. (Jbuch. Deutsche Luftfahrtforschung 1941) wurde gezeigt, daß die Dämpfung der langperiodischen Phygoidschwingung, die nach einer Störung des stationären Geradeausfluges bei festgehaltenem Höhenruder einsetzt, bei der üblichen quasi-stationären Rechenweise viel zu groß herauskommen kann gegenüber der Rechnung, in der die instationären Luftkräfte berücksichtigt werden. Verf. zeigt, daß auch bei der kurzperiodischen Schwingung durch die übliche Rechnung häufig eine viel zu große Stabilität vorgetäuscht wird: In 6 durchgerechneten typischen Beispielen treten Abweichungen bis zu 50 % in der Dämpfung auf, während die Frequenz i. a. einigermaßen stimmt. Die ganz stationäre Rechenweise ergab in diesen Fällen bessere Resultate als die quasistationäre. — Die Methode des Verf. besteht darin, die instationären Luftkräfte, die zu einer in komplexer Form anzusetzen Störung der Höhe $z = A e^{\lambda t}$ bzw. des Längsneigungswinkels $\theta = B e^{\lambda t}$ gehören, nach bekannten Verfahren auszurechnen und in die linearisierten Bewegungsgleichungen einzusetzen. Das führt auf eine „Gleichung 4-ten Grades“ in λ , deren Koeffizienten aber noch von λ abhängen und die durch Iteration gelöst werden müssen.

Johannes Weissinger.

Moisil, Gr. C.: La méthode des fonctions de variable hypercomplexe dans l'aérodynamique plane des liquides visqueux incompressibles. Studii Cerc. mat., Acad. Republ. popul. Române Inst. Mat. 1, 9—35, russische Zusammenfassg. — 37 und französ. Zusammenfassg. 38—39 (1950) [Rumänisch].

Der Zweck der Arbeit ist zu beweisen, daß die Gleichungen der ebenen, langperiodischen, stationären Bewegungen der zähen, unzusammendrückbaren Flüssigkeiten darauf herauskommen, daß gewisse Funktionen einer hyperkomplexen Größe von der Richtung unabhängige Ableitungen haben [Monogenität im Sinne von Fedorov: Mat. Sbornik, II. S. 16 (60), 353 (1946)]. Es wird hauptsächlich von einer von Obrero [Accad. Italia, Mem. Cl. Sci. fis. mat. natur. 6, 1—64 (1934); dies. Zbl. Math., 136] eingeführten hyperkomplexen Größe Gebrauch gemacht, und es werden Sätze über gewisse mit dem Problem zusammenhängende Funktionen aufgestellt.

Simon Stoilow.

Fišman, I. M.: Über die Bewegung einer sehr zähen Flüssigkeit zwischen Zapfen und Lager. Priklad. Mat. Mech., Moskva 14, 593—610 (1950) [Russisch].

Der Gegenstand dieser Arbeit ist die Aufstellung und Untersuchung der Differentialgleichungen der instationären Bewegung des unendlich langen Zapfengleiters unter Berücksichtigung der Trägheitskräfte der zähen Flüssigkeit. Es wird angenommen, daß das Schmiermittel den Raum zwischen dem Zapfen und Lager vollständig ausfüllt. Ausgehend von der Lösung ohne die Trägheitskräfte als erster Näherung, wird die Trägheit der zähen Flüssigkeit in zweiter Näherung in die Rechnung eingebezogen. — Zuerst leitet Verf. aus den Navier-Stokesschen Differentialgleichungen der instationären Bewegung die bekannten Gleichungen von W. J. Harrison [Trans. Cambridge phil. Soc. 22, 373—378 (1920)] als erste Näherung nochmals ab und korrigiert sie mit Hinzunahme der Trägheitskräfte in zweiter Näherung. Die mit erhaltenen Differentialgleichungen werden zuerst unter der Annahme einer konstanten Größe als auch der Richtung nach konstanter Belastung des Lagers untersucht. Da die Lösung dieser Gleichungen in allgemeiner Form nicht angegeben werden kann, führt Verf. eine qualitative Untersuchung derselben mit Hilfe einer Methode von N. M. Krylov-N. N. Bogoljubov (Einführung in die nichtlineare Mechanik, Kiew 1937) durch. Das erhaltene Resultat zeigt, daß der Zapfenmittelpunkt sich nicht entlang der geschlossenen Kurven, wie nach Harrison, bewegt, sondern daß er sich asymptotisch der Lage dieses Punktes bei stationärer Bewegung nähern wird. Weiterhin wird der Fall der im

Mittelpunkt des Zapfens angreifenden periodischen Belastung auch mit Hilfe der oben genannten Methode untersucht. Es ergibt sich, daß im Falle der Übereinstimmung der Eigenschwingungsfrequenz des Systems mit der Frequenz der Belastungskraft der Zapfenmittelpunkt sich bei seiner Bewegung asymptotisch einer Ellipse nähert.

Bekir Dizioglu.

Viguié, Gabriel: *Nouvelles équations de la mécanique des fluides visqueux.* Periodicum math.-phys. astron., Zagreb, II. S. 4, 193—199 und kroatische Zusammenfassg. 200 (1949).

Unveränderter Abdruck der in dies. Zbl. 37, 276 besprochenen Arbeit.

Walter Wuest.

Rotta, J.: Über die Theorie der turbulenten Grenzschichten. Mit einer Einführung von A. Betz. Mitt. Max-Planck-Inst. Strömungsforschung. Nr. 1, 54 S. (1950).

Vorliegende Arbeit bringt einen wesentlichen Beitrag zur rationellen Berechnung der turbulenten Reibungsschichten. Die bisher gebräuchlichen halbempirischen Berechnungsverfahren arbeiten im wesentlichen mit dem Impulssatz der Grenzschichttheorie. Diesem wird hier der Energiesatz der turbulenten Grenzschicht an die Seite gestellt. Eine wesentliche neue Erkenntnis ist u. a., daß es auch für die turbulente Grenzschicht „ähnliche“ Lösungen gibt, d. h. solche, bei denen das Geschwindigkeitsprofil längs der Wand nur affin verzerrt wird. Ebenso wie bei laminarer Strömung liegen diese ähnlichen Lösungen vor, wenn die Geschwindigkeitsverteilung der Außenströmung dem Gesetz $U(x) = a x^m$ gehorcht (x = Lauflänge; a, m Konstanten). Durch Auswertung des vorliegenden Versuchsmaterials werden die Zusammenhänge zwischen den „Kenngrößen“ der Grenzschicht (Verdrängungsdicke, Impulsverlustdicke, Energieverlustdicke, Wand Schubspannung) gewonnen, die für die Anwendung des Verfahrens gebraucht werden.

H. Schlichting.

Burgers, J. M.: *Problèmes se rattachant à la théorie de la turbulence.* Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci. Nr. 14 (Méthodes de calcul dans des problèmes de mécanique, Marseille 30. 3. — 6. 4. 1948; Paris 8. — 9. 4. 1948), 49—54 (1949).

Von Problemen, die mit der Theorie der Turbulenz im Zusammenhang stehen, werden in diesem Kolloquium in referierender Darstellung die Beziehungen behandelt, die zwischen der statistischen Theorie der Turbulenz und der isotropen Turbulenz bestehen, die Frage des Widerstandes bei turbulenten Strömungen, die Berechnung des Spektrums der Turbulenz, der Zusammenhang mit der molekularen Struktur des strömenden flüssigen oder gasförmigen Mittels, die nicht durch Versuche erkennbar wird, u. a. behandelt, wobei die Reynoldssche Zahl eine ausschlaggebende Rolle spielt. Es werden die Differentialgleichungen gekennzeichnet, die diesen Problemen eigentümlich sind, und die Form der Lösungen, die für die in Rede stehenden Probleme in Betracht kommen. Die Wichtigkeit der dreifachen Korrelationen wird besonders hervorgehoben. Die behandelte Literatur wird in einer Bibliographie zusammengestellt.

Theodor Pöschl.

Cap, Ferdinand: Über zwei Verfahren zur Lösung eindimensionaler instationärer gasdynamischer Probleme. Acta phys. Austriaca 2, 224—238 (1949).

Das Verfahren von Prandtl und Busemann zur graphischen Behandlung stationärer ebener Strömungen ist bekanntlich in mannigfacher Weise modifiziert und u. a. auf eindimensionale instationäre Vorgänge angewendet worden. Verschildert das Verfahren von Schultz-Grunow [Forsch. Gebiete Ingenieurw., Berlin 13, 125 (1942)] für ideale Gase und gibt eine Erweiterung auf beliebige Zustandsgleichungen an. Außerdem behandelt er die adiabatische Entspannung eines hochgespannten Abelschen Gases [$p(V - \beta) = RT$] nach einem besonderen Verfahren.

Walter Brödel.

Cherry, T. M.: Exact solutions for flow of a perfect gas in a two-dimensional val nozzle. Proc. R. Soc., London, A 203, 551—571 (1950).

Mit Hilfe der Hodographenmethode wird eine Schar exakter Lösungen stetiger, tationsfreier, isentropischer, stoßwellenfreier Strömungen eines idealen Gases durch valdüsen angegeben, die von Unterschall nach Überschall führen. Im Unter- allgebiet wird das Legendresche Potential durch unendliche Reihen mit Bessel- en Funktionen dargestellt, die ins Überschallgebiet hinein durch Integrale fort- setzt werden. Die benützte Methode ist der ähnlich, die Lighthill (dies. Zbl. 29, 7) und Cherry (dies. Zbl. 29, 176) zur Ermittlung der Gasströmung um einen linder verwandt haben.

Hilmar Wendt.

Bergman, S.: Determination of axially symmetric flow patterns of a com- issible fluid. J. Math. Phys., Massachusetts 29, 133—145 (1950).

Zur Bestimmung spezieller achsensymmetrischer, kompressibler Strömungs- der wird von der Gleichung für das Legendre-Potential ausgegangen, deren nearität gewisse Lösungsmethoden zuläßt. Es wird ein Iterationsverfahren an- geben, das von der Lösung der homogenen Gleichung, d. h. vom ebenen Strömungs- oblem, ausgeht. Die Lösung des vorangehenden Schrittes wird in das inhomogene (hsensymmetrische) Zusatzglied eingesetzt und aus dieser Gleichung eine nächste herung gewonnen. Die Konvergenz dieser Methode wird untersucht und haupt- ehlich der erste Iterationsschritt mit komplexen Koordinaten behandelt. Wie i den speziellen ebenen Lösungen sind auch hier die gemischten Über- und Unter- allströmungen mit eingeschlossen. Anwendungsbeispiele werden nicht gegeben.

Klaus Oswatitsch.

Strang, W. J.: Transient source, doublet and vortex solutions of the linearized uations of supersonic flow. Proc. R. Soc., London, A 202, 40—53 (1950).

In Fortsetzung einer früheren Arbeit des Verf. [Proc. R. Soc., London, A 195, 5—248 (1948)] werden unstetige Lösungen der linearisierten Potentialgleichung r kompressiblen Strömungen bei Überschall angegeben. U. a. werden behandelt: 1. Die mit konstanter Überschallgeschwindigkeit längs der x -Achse bewegte Quelle, ren Ergiebigkeit durch die Stufenfunktion $H(t)$ [$H(t) = 0$ für $t < 0$; $H(t) = 1$ r $t \geq 0$] festgelegt ist. 2. Die in ihrer Richtung bewegte Quellstrecke mit der uellstärke $H(t)$ (needle source). 3. Eine mit Quellen belegte Halbgerade wird in er Richtung bewegt. Die Quellen beginnen beim Durchgang durch eine vor- gebene Front zu emittieren (gust source). 4. Doppelquellenanordnungen vom $H(t)$ - rp. Durch Überlagerung solcher Doppelquellen in einer Halbebene wird eine allgemeinerung des inkompressiblen Wirbels erreicht.

Hilmar Wendt.

Rey Pastor, Julio: Über die linearisierte Gleichung des Überschallfluges. Ann. at. pura appl., Bologna, IV. S. 30, 91—96 (1949).

Für die mittels hydraulischer, akustischer und ähnlicher Vorstellungen ge- ennene bekannte Quell-Senkendarstellung derjenigen Lösung der dreidimensio- en Schwingungsgleichung, die beim praktischen und technischen Berechnen von nnen Überschallflügeln heutzutage eine ausschlaggebende Rolle spielt, existiert m Verf. zufolge noch keine saubere mathematische Herleitung. (Ref. möchte an- hmen, daß jeder mathematisch versierte Gasdynamiker sich einen Beweis für cketts Integraldarstellung des Störpotentials zurechtgelegt hat.) — In der vor- genden Note, die im wesentlichen präliminaren Charakter für eine geplante aus- arliche und den sogenannten „antisymmetrischen“ Fall (u. a. also die tragende atte) einschließende Arbeit hat, gibt Verf. eine strenge Herleitung für den Zu- mmenhang zwischen der Quellstärke der Belegung und der Oberflächenneigung r Flügelkontur auf der Basis der Theorie der singulären Integrale (Lebesgue- obson), und zwar für den Fall des symmetrischen, nichtangestellten Flügels.

Insbesondere befaßt er sich auch mit dem Flügel rechteckigen Grundrisses und studiert für diesen Fall die Begrenzung der durch den Flügel nicht gestörten Zone.

Hermann Behrbohm.

Munk, M. M.: The reversal theorem of linearized supersonic airfoil theory. J. appl. Phys., Lancaster Pa. **21**, 159—161 (1950).

Beitrag zur Frage, unter welchen Bedingungen Auftrieb und Widerstand eines Tragflügels bei Überschallströmung (linearisierte Näherung) ihre Werte behalten wenn man die Strömung um den Tragflügel umkehrt.

Hilmar Wendt.

Tollmien, Walter: The direct hodograph method in the theory of the flow of compressible fluids. Reissner Annivers. Vol., Contr. appl. Mech., Ann Arbor, Mich., 89—110 (1949).

Die Hodographenmethode für zweidimensionale isentropische Strömungen kompressibler Medien, bei der an Stelle der Ortskoordinaten die Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit als unabhängige Veränderliche treten, wird meist auf das Geschwindigkeitspotential φ oder die Stromfunktion ψ angewandt, wobei die nicht-linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung für φ bzw. ψ in lineare Differentialgleichungen übergehen. Verf. benützt statt dessen die „direkte Hodographenmethode“ für die durch die Charakteristiken-theorie gelieferten Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen den Ortskoordinaten und den Geschwindigkeitskomponenten ohne Benützung einer Potentialfunktion oder Stromfunktion. An verschiedenen Beispielen (Untersuchungen von Singularitäten in der Strömung: Grenzlinien in Überschallströmung, Durchgang durch die Schallgeschwindigkeit, Fortsetzung unstetiger Störungen) wird die Tragweite der Methode eindrucksvoll vorgeführt. Hierbei wird auch auf eine frühere sehr bemerkenswerte Arbeit von Tollmien und Schäfer [AVA-Bericht 114 (1946)] verwiesen, in der die Ausbildung eines Verdichtungsstoßes in der Nachbarschaft einer konvexen stetig gekrümmten Wand untersucht wird.

Robert Sauer.

Bergman, S.: On tables for the determination of transonic flow patterns. Reissner Annivers. Vol., Contr. appl. Mech., Ann Arbor, Mich., 13—36 (1949).

Die Hodographenmethode der Gasdynamik, die sich vom theoretischen Standpunkt aus als vorteilhaft erweist wegen der durch sie bewirkten strengen Linearisierung der Grundgleichung, hat vom praktischen Standpunkt aus mehrere Nachteile. Einer ist der, daß Vernachlässigungen schlecht übersehbar sind, ein anderer der, daß die numerische Durchrechnung eines Problems, vor allem die Rücktransformation in die Strömungsebene, einen großen Arbeitsaufwand erfordert. Überdies führt die Auffindung des Geschwindigkeitspotentials für das Umströmungsproblem eines gegebenen Profils zu sehr komplizierten, nicht-linearen Randbedingungen, und es sind keine Methoden bekannt, diese Aufgabe direkt anzugehen. Verf. sieht es daher als wünschenswert an (um zumindest einem der genannten Einwände zu begegnen), zur Reduktion des Arbeitsaufwandes Tafeln auszuarbeiten, die auf der Hodographenmethode basieren und das Bild der Stromlinien in der Strömungsebene direkt zu ermitteln gestatten. — Dies wird zunächst am inkompressiblen Fall erläutert: In den Hodographenvariablen $W = \log w$ (w = Betrag der Geschwindigkeit) und θ (Strömungswinkel gegen x -Achse) schreibt sich das komplexe Geschwindigkeitspotential Φ der komplexen Veränderlichen $z = W + i\theta$ in der Gestalt

$$\Phi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{\nu} (z - W_0)^{\nu-1/2} \quad (W_0 = \log w_{\infty}, w_{\infty} \text{ Geschwindigkeit im Unendlichen}).$$

Bei rein imaginären b_{ν} (Fall des symmetrischen Störkörpers) erhält man alsdann für die Stromfunktion

$$(1) \quad \psi = J\{\Phi(z)\} = \sum_{\nu=0}^{\infty} i b_{\nu} \psi_{\nu}(W, \theta; W_0) \quad \text{mit} \quad \psi_{\nu} = R\{(z - W_0)^{\nu-1/2}\}$$

und kann die Stromlinien in der Strömungsebene aus den Darstellungen

$$(2) \quad x = \sum_{\nu=0}^{\infty} i b_{\nu} X_{\nu}(W, \theta; W_0), \quad y = \sum_{\nu=0}^{\infty} i b_{\nu} Y_{\nu}(W, \theta; W_0)$$

finden. Dadurch sind die von der Profilverwahl unabhängigen Größen $X_{\nu}, Y_{\nu}, \psi_{\nu}$ separiert von den b_{ν} , die vom Profil abhängen, und es sind diese Größen $X_{\nu}, Y_{\nu}, \psi_{\nu}$, die einer Tabulierung unter-

zogen werden können. — Für den kompressiblen Fall wird neben θ die Variable $W = \int_{a^*}^w q(w) \frac{dw}{w}$

geführt (ϱ Dichte, α^* kritische Geschwindigkeit), so daß sich die Kontinuitätsgleichung in der Gestalt

$$L(\psi) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial W^2} + l(W) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{mit} \quad l(W) = \frac{1-M^2}{\varrho^2} \quad (M = \text{Mach'sche Zahl})$$

darstellt. In bekannter Weise wird nun in der Potenzreihenentwicklung von $l(W)$ (in der Umgebung von $W = 0$, d. h. der kritischen Geschwindigkeit) nur die 1. Potenz von W beibehalten (das absolute Glied verschwindet per definitionem) und approximativ die Gleichung vom Tricomischen Typ

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial W^2} + C W \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (C = \text{Konstante})$$

In weiteren Betrachtungen zugrunde gelegt. Mittels einer vom Verf. entwickelten Operatorentheorie wird alsdann eine Korrespondenz zwischen inkompressiblen und kompressiblen Strömungen aufgestellt, in dem Sinne, daß aus jedem komplexen Geschwindigkeitspotential einer kompressiblen Strömung mittels eines geeigneten Operators eine komplexe Lösung von (3) hergeleitet wird, die ihrerseits dann das komplexe Potential einer kompressiblen Strömung darstellt. Dadurch ergibt sich für die Stromfunktion ψ wieder eine Darstellung (1), wo jetzt aber durch $\psi_\nu = \Re \{ B_\nu(\chi; W_0) (\chi - W_0)^{\nu-1/2} \}$ gegeben ist, wobei also zusätzlich die sogenannten Kompressibilitätsfaktoren B_ν , darstellbar als gewisse hypergeometrische Funktionen der komplexen Variablen $\chi = -c(-W)^{3/2} + i\theta$ (c geeignete Konstante, die nur vom Adiabatenexponenten $k = c_p/c_v$ abhängt) in (1) eingeführt werden. Hiermit gelten dann auch wieder Darstellungen des Typs (2) für die Rücktransformation von der Hodographen- in die Strömungsebene, und wie im inkompressiblen Fall bietet sich die Möglichkeit einer Tabulierung der profilabhängigen Funktionen X_ν, Y_ν . Für den speziellen Wert $W_0 = -0,02$ wird eine solche Tafel für $\psi_\nu(W, \theta)$ für $\nu = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ angegeben für $-0,050 \leq W \leq 0,050$ (in Schritten $\Delta W = 0,005$) und jeweils für drei bzw. vier der Werte $\theta = 0; 0,5; 1,0; 1,5$. — Die Methode wird angewandt auf dasjenige ellipsenähnliche Profil, welches nach dem genannten Korrespondenzprinzip der inkompressiblen Umströmung einer Ellipse vom Dickenverhältnis 1:11 entspricht. Für einige wenige spezielle Werte von W, θ werden dabei dann noch kleine Tafeln für X_ν, Y_ν ($\nu = 0, 1, 2, 3, 4, 5$) angegeben. — Eine kurze Diskussion der Bedingungen, unter denen ein gebogener Hodograph einem physikalisch möglichen Strömungsbild entspricht, beschließt die Arbeit. — Anm. des Ref.: Es sei gestattet, auf einen Vortrag des Ref. im mathematischen Kolloquium der Universität Freiburg im Dezember 1948 hinzuweisen, in dem dessen bisher veröffentlichte Untersuchungen über schallnahe Strömungen aus den Jahren 1947/48 mitgeteilt wurden. Ref. kannte die Bergmanschen Arbeiten damals nicht, doch besteht eine Verwandtschaft in den Grundgedanken. W, θ genügt bei geeigneter Normierung, und bei analoger Approximation in Schallnähe wie oben, dem nicht-linearen System $\theta_\varphi = W_\psi$, $\theta_\psi = W W_\varphi$, $\varphi_\psi = W_\varphi$, $\varphi_\varphi = W$, was nach Legendrescher Transformation für $\Omega(W, \theta) + \omega(\varphi, \psi) = 0$, was nach Legendrescher Transformation für $\Omega(W, \theta) + \omega(\varphi, \psi) = 0$ führt. Für $\xi = \frac{2}{3} W^{3/2}$, $\bar{\eta} = \theta$, $\bar{\xi} = \bar{\xi}(\bar{\eta}) = \Omega(W, \theta)$ geht aus ihr bei $W > 0$ (Überschall) die hyperbolische Normalform $\bar{\xi} \bar{\xi} - \bar{\xi} \bar{\eta} \bar{\eta} + \frac{1}{3\bar{\xi}} \bar{\xi} \bar{\xi} = 0$, für $\bar{\xi} = \frac{2}{3} (-W)^{3/2}$, $\bar{\eta} = \theta$, $\bar{\xi}(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = \Omega(W, \theta)$ bei $W < 0$ (Unterschall) die elliptische Normalform $\bar{\xi} \bar{\xi} \bar{\xi} + \bar{\xi} \bar{\eta} \bar{\eta} + \frac{1}{3\bar{\xi}} \bar{\xi} \bar{\xi} = 0$ hervor. Man zeigt nun leicht durch einfache partielle Integrationen, daß sowohl

$$\int_{-1}^1 f(\xi, \eta) (1-t^2)^{-5/6} dt \quad \text{als auch} \quad \int_{-1}^1 g(\xi, \eta) (1-t^2)^{-1/6} dt$$

in Lösungen der Normalgleichungen führen, und zwar zu solchen des elliptischen Typs, wenn ξ, η bzw. $g(\xi, \eta)$ Lösungen der Laplaceschen Gleichung $\Delta f = 0$ bzw. $\Delta g = 0$ sind, zu solchen des hyperbolischen Typs dagegen, wenn f bzw. g Lösungen der zweidimensionalen homogenen Schwingungsgleichung sind. Diese Integraltransformationen entsprechen Bergmans Operatoren und führen gleichfalls zu einem Korrespondenzprinzip zwischen inkompressiblen und kompressiblen Strömungen. Dabei werden die „inkompressiblen“ Funktionen f, g über ihre erste Variable einer gewissen Mittelbildung unterzogen. Man kann die erste Darstellung „quellartig“, die zweite dagegen „wirbelartig“ nennen. Setzt man nämlich die inkompressible Quelle in die erste Darstellung ein, so entsteht die kompressible Quelle, setzt man den inkompressiblen Wirbel in die zweite Darstellung ein, so entsteht der kompressible Wirbel, setzt man dagegen „alsch“ ein, so entstehen physikalisch nicht brauchbare Strömungen. — Hauptgegenstand der Untersuchungen ist aber der Schalldurchgang, was dabei auf eine geeignete Verknüpfung von Potential- und Wellenfunktionen längs der Schalllinie $W = 0$ hinausläuft.

Hermann Behrbohm.

Lew, Henry G.: On the compressible boundary layer over a flat plate with uniform suction. Reissner Annivers. Vol., Contr. appl. Mech., Ann Arbor, Mich., 43—60 (1949).

Es wird die laminare Grenzschicht an der längsangeströmten ebenen Platte mit homogener Absaugung in kompressibler Strömung berechnet. Dabei wird angenommen, daß zwischen Gas und Flüssigkeit kein Wärmeübergang vorhanden ist (Thermometerproblem). Die Rechnung wird nach dem Pohlhausenschen Näherungsverfahren ausgeführt, mit zwei verschiedenen Ansätzen für die Geschwindigkeitsverteilung (Polynom 4. Grades, Exponentialfunktion). Es ergibt sich, daß bei festgehaltener Absaugemenge der Reibungsbeiwert der Platte mit wachsender Machzahl etwas abnimmt, während bei fester Mach-Zahl der Reibungsbeiwert mit wachsender Absaugemenge zunimmt. Die ziemlich ausgedehnten Beispielrechnungen enthalten auch Angaben über die Grenzschichtdicke und die Geschwindigkeitsverteilung in Abhängigkeit von Mach-Zahl und Absaugmenge. *H. Schlichting.*

Ertel, Hans: Ein Theorem über asynchron-periodische Wirbelbewegungen kompressibler Flüssigkeiten. Miscell. acad. Berolin. 1, 62—68 (1950).

Verf. betrachtet „asynchron-periodische“ Wirbelbewegungen, bei denen die Flüssigkeitsteilchen räumlich geschlossene Bahnen beschreiben. Die Wirbelbewegung wird als stationär vorausgesetzt, so daß Stromlinien und Bahnlinien übereinstimmen. Die Umlaufzeit ist für Teilchen, die Stromlinien der gleichen Energiefläche angehören, gleich, dagegen für verschiedene Energieflächen verschieden. Durch Integration der Lagrangeschen Bewegungsgleichungen idealer Flüssigkeiten wird für die Umlaufzeit τ die Beziehung $\tau = dS/dH$ abgeleitet, wobei H die für jedes Teilchen individuell konstante (d. h. zeitunabhängige) Gesamtenergie darstellt und S die „verkürzte Wirkungsfunktion“ bezeichnet, die hydrodynamisch gleich der Zirkulation ist. Dieses Theorem stellt eine hydrodynamische Erweiterung eines in Beziehung zur Hamilton-Jacobischen Theorie stehenden Satzes der Punktdynamik dar.

Walter Wuest.

Hicks, B. L.: On the characterization of fields of diabatic flow. Quart. appl. math. 6, 405—416 (1949).

Weiterführung der in dies. Zbl. 34, 120 entwickelten Überlegungen.

Hilmar Wendt.

Miles, John W.: On virtual mass and wave drag at subsonic speeds. J. aeronaut. Sci., Easton, Pa. 17, 667—668 (1950).

Brinkley jr., Stuart R. and John C. Kirkwood: Theory of the propagation of shock waves from cylindrical charges of explosive. Proc. Symposia appl. Math. Nr. 1 (Brown Univ. 2. — 4. 8. 1947. Nonlinear problems in mechanics of continua), 48—54 (1949).

Näherungsweise Theorie der Fortpflanzung von Stoßwellen, die durch einen unendlich langen Zylinder aus Explosivstoff erzeugt werden. Es wird dabei eine adiabatische, isometrische Umwandlung der gesamten Explosivladung in die Zersetzungsprodukte angenommen. Die Theorie berücksichtigt einen endlichen Entropiezuwachs beim Durchgang der Stoßwelle und gestattet die Anwendung der exakten Hugoniotkurve. Es werden zwei Fälle betrachtet, nämlich der eindimensionalen Fall, bei dem die Stoßwelleneigenschaften Funktionen der Zeit und der radialen Koordinate sind, sowie der zweidimensionale Fall einer Stoßwelle, die durch eine mit endlicher, konstanter Geschwindigkeit in axialer Richtung wandernde Detonationswelle erzeugt wird. Auch in diesem Fall sind die Stoßwelleneigenschaften nur von der Zeit und der radialen Koordinate abhängig, da die radiale und achsiale Koordinate eindeutig miteinander verknüpft sind.

Walter Wuest.

Polachek, H. and R. J. Seeger: On shock-wave phenomena: interaction of shock waves in gases. Proc. Symposia appl. Math., Nr. 1 (Brown Univ. 2. — 4. 8. 1947. Nonlinear problems in mechanics of continua), 119—144 (1949).

Zusammenfassender Bericht über die reguläre Reflexion von Stoßwellen und die Stoßwellengabelung (auch V-Effekt oder Mach-Effekt genannt). Berücksichtigt werden fast ausschließlich Arbeiten, die während des Krieges durch das Navy Bureau Ordnance durchgeführt wurden, ohne daß gleichzeitige deutsche Arbeiten Erwähnung finden. In einem einleitenden Abschnitt werden die Beziehungen für den graden Verdichtungsstoß zusammengestellt, wobei als unabhängige Veränderliche das Druckverhältnis vor und nach dem Stoß gewählt wird. Diese Beziehungen werden dann auf die reguläre Reflexion von Stoßwellen angewandt. Für einen bestimmten Einfallswinkel und ein gegebenes Druckverhältnis erhält man im allgemeinen zwei Lösungen. Der nächste Abschnitt bringt eine Theorie der Stoßwellengabel, wobei die Zustände in den vier Bereichen zwischen den Stoßfronten und der vom Gabelpunkt ausgehenden Diskontinuitätsfläche als konstant angenommen werden. Die Rechnung wird im Gegensatz zu deutschen Arbeiten rein algebraisch durchgeführt. Diese Theorie wird dann dadurch erweitert, daß auch ein vom Gabelpunkt ausgehender Verdünnungsfächer (Prandtl-Meyer-Strömung) zugelassen wird. Im weiteren Abschnitt behandelt die Brechung von Stoßwellen an einer freien Oberfläche zwischen zwei Gasen. Auch hier läßt sich die Lösung rein algebraisch gewinnen. Näher untersucht werden die Sonderfälle der senkrecht einfallenden Stoßwelle und der schief auftretenden Stoßwelle verschwindend kleiner Stoßstärke (akustische Welle), ferner der Grenzfall des Verschwindens der reflektierten Stoßwelle und die totale Reflexion einer Stoßwelle. Ein abschließender Abschnitt bringt eine Verallgemeinerung der Dreifach-Gabeln auf n -fach-Gabelstöße, wobei besonders die Frage untersucht wird, unter welchen Bedingungen keine Diskontinuitätsfläche auftritt.

Walter Wuest.

Poggi, Lorenzo: The reflection of „rectilinear“ waves in one-dimensional gas flows. *J. aeronaut. Sci.*, Easton, Pa. 17, 813—815 (1950).

Güttinger, Werner: Der Stoßeffect auf eine Flüssigkeitskugel als Grundlage einer physikalischen Theorie der Entstehung von Gehirnverletzungen. *Z. Naturforsch.*, Tübingen 5a, 622—628 (1950).

Der Stoßeffect auf eine mit kompressibler Flüssigkeit gefüllte Hohlkugel kann aus der Differentialgleichung für den freien Schwingungsvorgang bei passender Wahl der Anfangsbedingungen berechnet werden. Der Druckverlauf bei endlicher Stoßdauer wird über ein Faltungsintegral gewonnen. Aus den Schaubildern des Druckverlaufs ist zu ersehen, daß die starken Extremwerte des Momentanstoßes bei endlicher Stoßzeit durch die länger wirkende Beschleunigung zum Abklingen kommen; statt dessen tritt eine Druckfront zur Kugelmittle hin auf.

J. Pretsch.

Meixner, J. und U. Fritze: Das Schallfeld in der Nähe der frei schwingenden Kolbenmembran. *Z. angew. Phys.* 1, 535—542 (1949).

In der Arbeit wird das Ergebnis numerischer Berechnungen der räumlichen Verteilung des Schalldrucks in der näheren Umgebung einer frei schwingenden, keisförmigen Kolbenmembran wiedergegeben und graphisch dargestellt, und zwar für Werte von Wellenzahl mal Membranradius ($2\pi a/\lambda$) bis $2\pi a/\lambda = 10$. Der Schalldruck ist in Einheiten der Größe „Membranschnelle mal Wellenwiderstand des Mediums“ angegeben, größtenteils nach Betrag und Phase. Das berechnete Schallfeld ist übrigens gleichzeitig das Beugungsfeld, das hervorgerufen wird, wenn eine ebene Welle senkrecht auf eine starre Kreisscheibe fällt. Zur Berechnung wurde die Lösung des Problems durch Reihenentwicklung nach Sphäroidfunktionen (den Lösungen der Wellengleichung in den Koordinaten des abgeplatteten Rotationsellipsoids) verwendet, in Erweiterung früherer Rechnungen von Bouwkamp (Dissertationen 1941). — Die Ergebnisse wurden verglichen mit denen einer Näherung im Sinne der Kirchhoffschen Beugungstheorie, welche durch das Schallfeld einer an einer starren Wand umrahmten Kolbenmembran gegeben ist. Für letzteres sind entsprechende numerische Rechnungen von H. Stenzel (Leitfaden zur Be-

rechnung von Schallvorgängen, Berlin 1939) vor. Schon von $2\pi a/\lambda \approx 4$ an erweisen sich die Unterschiede der beiden Lösungen im „Nahfeld“ als überraschend klein. *Arnold Schoch.*

Bouwkamp, C. J.: On the freely vibrating circular disk and the diffraction by circular disks and apertures. *Physica, The Hague* 16, 1—16 (1950).

Das Problem der Berechnung des Schallfelds einer frei schwingenden, kreisförmigen Kolbenmembran und das äquivalente der Beugung einer ebenen Schallwelle an einem kreisförmigen starren Schirm hat in neuerer Zeit viele Bearbeiter angezogen, über deren Methoden und Ergebnisse Verf. einleitend einen Überblick gibt. Ausgehend von der Bemerkung, daß die meisten Bearbeiter bei der Auswertung auch strenger Lösungen sich auf den Fall $\frac{\text{Membranradius } a}{\text{Wellenlänge } \lambda} < 1$

beschränken müssen, entwickelt er ein Verfahren, das diese eingeschränkten Ergebnisse auf möglichst direkte Weise zu gewinnen gestattet. — Unter Verwendung der aus dem Greenschen Satz folgenden quellenmäßigen Darstellung des Geschwindigkeitspotentials $\varphi(x, y, z)$ durch seine Werte auf der Membranfläche $S(z=0)$ liefert die Randbedingung $\partial\varphi/\partial z = 1$ auf S eine Integralgleichung für $\varphi(x, y, 0)$ auf S :

$$\lim_{z \rightarrow +0} -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \iint_S \varphi(x', y', 0) \frac{e^{ikr}}{r} dx' dy' = 1; \quad r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}.$$

Wegen der Rotationssymmetrie des Felds schreibt man für $\varphi(x, y, 0)$ im weiteren in Polarkoordinaten $\varphi(\varrho)$. φ ist außerdem noch einer „Kantenbedingung“ zu unterwerfen [(grad φ)² muß integrierbar sein], erst dadurch ist die Lösung eindeutig bestimmt. Mit dem Ansatz $\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(i k)^n$

folgt hieraus weiter ein unendliches System von Integrodifferentialgleichungen für die φ_n , die symbolisch in der rekursiven Form geschrieben werden können:

$$DT_0\{\varphi_0\} = 1, \quad \varphi_1 \equiv 0, \quad DT_0\{\varphi_n\} = \sum_{r=2}^n \frac{\nu-1}{\nu!} T_{\nu-2}\{\varphi_{n-\nu}\}$$

(D ein Differentialoperator, T_ν Integraltransformationen). Die Lösungen setzt Verf. an in der Form $\varphi_n = \sum_m B_{nm} P_{2m+1}(\sqrt{1-\varrho^2})$, P_{2m+1} Legendresche Polynome, die durch die früher von ihm entwickelte strenge Lösung des Problems durch Sphäroidfunktionen (Diss. Groningen 1941) nahe gelegt wird. Die Funktionen $DT_0\{P_{2m+1}\}$ und $T_\nu\{P_{2m+1}\}$ lassen sich wieder durch Legendresche Polynome ausdrücken (wegen der Herleitung der Ausdrücke wird auf eine besondere Veröffentlichung in den Proc. Akad. Wet., Amsterdam, verwiesen), womit eine Bestimmung der B_{nm} möglich wird. Mit dem erhaltenen Ergebnis wird φ in der „Fernzone“, die ausgestrahlte Leistung und die Mediumrückwirkung berechnet, wobei die Glieder bis $(ka)^6$ numerisch angegeben werden. *Arnold Schoch.*

Kármán, Theodore von: Theoretical remarks on thrust augmentation. *Reissner Annivers. Vol., Contr. appl. Mech., Ann Arbor, Mich.*, 461—468 (1949).

Es wird nachgewiesen, daß die Überlegenheit mehrerer Schubsteigerungs- vorrichtungen (einfachster Fall: Zylinderrohr mit Eintrittsdüse) erklärt werden kann, wenn man annimmt, daß die Geschwindigkeitsverteilung u_1 der Axialkomponente der Sekundärströmung über dem Querschnitt, wo die Mischung mit dem Strahl beginnt, nicht gleichförmig, sondern ungleichförmig ist. In Schaubildern werden Austrittsgeschwindigkeit und Schubsteigerungsfaktor über dem Flächenverhältnis Strahlquerschnitt zu Restquerschnitt des Rohres für verschiedene Mischungsfaktoren (Mittelwert von u_1 zu quadratischem Mittelwert von u_1) verglichen. *Joachim Pretsch.*

Wärmelehre:

Sokolov, V. A.: Phasenübergänge zweiter Art und die Gleichung von Ehrenfest. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S.* 65, 883—886 (1949) [Russisch].

Es wird eine neue Herleitung der Gleichung von Ehrenfest für sogenannte Umwandlungen zweiter Art gegeben, welche den Einwänden von Justi und v. Laue [S.-B. Preuß. Akad. Wiss., phys.-math. Kl. 1934, 237—249; dies. Zbl. 9, 284] nicht unterliegt. Wesentlich ist die Annahme, daß die Umwandlung nicht bei einer wohldefinierten Temperatur, sondern in einem Temperaturintervall verläuft.

Josef Meixner.

Stupočenko, E. V.: Über die Verteilung der kinetischen Energie in reagierenden Gassystemen. *Ž. eksper. teor. Fiziki. Moskva-Leningrad* 19, 493—501 (1949) [Russisch].

Malić, Dragomir L.: Beitrag einer richtigeren Auffassung gewisser Grundbegriffe der Thermodynamik. *Vesnik Društva Mat. Fiz. Srbije* 2, Nr. 1/2, 19—29 und deutsche Zusammenfassg. 30 (1950) [Serbisch].

Es werden die Eigenschaften und Unterschiede betrachtet zwischen den Zustandsgrößen p, t, v, u, i und denjenigen, die ausschließlich von den makroskopischen („quasistatischen“) Veränderungen der ersten abhängig sind (Wärmemenge, mechanische Arbeit). In diesem Zusammenhang wird auch allgemein die Frage der makroskopischen und mikroskopischen Zustände und ihrer Veränderungen (statistische Betrachtungsweise), sowie ihr Einfluß auf die Werte der Zustandsgrößen kurz besprochen. Außerdem werden gewisse Benennungen und Definitionen (Wärmereservoir) besprochen, die nicht genügend gut dem richtigen physikalischen Wesen der Dinge entsprechen. (Autoreferat.)

Biegelmeier, Gottfried: Ein Beitrag zur klassischen Diffusionstheorie. *Acta phys. Austriaca* 4, 278—289 (1950).

Zur experimentellen Untersuchung der Form der Äquikonzentrationsflächen in einem Kristall, der in das diffundierende Medium eingebettet ist oder dieses in einem entsprechenden Hohlraum enthält, wird aus einer auf einer Glasplatte ausgegossenen, mit Phenolphthalein getränkten Gelatineschicht ein quadratisches Stück herausgeschnitten und in die entstehende Öffnung Natronlauge gefüllt. Die Lauge diffundiert in die Gelatine hinein und färbt sie bis zu den scharf begrenzten Stellen, bis zu denen sie vorgedrungen ist, rot. Es ergibt sich, daß die Diffusionszone bald eine kreisförmige Form annimmt, die ursprünglichen Ecken also abgerundet werden, was auch zu erwarten ist. Zur theoretischen Begründung dieses Ergebnisses wird die Diffusionsgleichung unter der Annahme eines richtungsunabhängigen Diffusionskoeffizienten durch Trennung der Variablen für den ein-, zwei- und dreidimensionalen Fall mit Hilfe von Fourierintegralen in bekannter Weise integriert. Die Lösungen sind Summenprodukte von Fehlerintegralen. Sie ergeben die experimentell erhaltene Abrundung der anfänglich ebenflächig begrenzten Äquikonzentrationsflächen.

A. Kochendörfer.

Sestini, Giorgio: Su due problemi di propagazione del calore in un solido eterogeneo con simmetria cilindrica. *Riv. Mat. Univ. Parma* 1, 405—417 (1950).

L'A. approfondisce lo studio di due problemi di trasmissione non stazionaria del calore, già da lui considerati in precedenti ricerche [Ist. Lombardo Sci. Lett., Rend., Cl. Sci. mat. natur., III. S. 75, 47—65 (1942), questo *Zbl.* 27, 177; e questo *Zbl.* 31, 225].

Dario Graffi.

Elektrodynamik:

Love, E. R.: The electrostatic field of two equal circular co-axial conducting disks. *Quart. J. Mech. appl. Math.* 2, 428—451 (1949).

Die frühere Lösung dieses Problems von Nicholson enthält nach Angabe des Verf. grobe Fehler. Die Potentiale der zwei koaxialen Scheiben sind im Betrage gleich und im Vorzeichen entweder gleich oder entgegengesetzt. Das Potential im Unendlichen ist Null. Verf. führt in bezug auf jede der Scheiben ein System von Sphäroidalkoordinaten ein und setzt als Potential eine unendliche Reihe von Lösungen der betreffenden Differentialgleichungen an. Diese Lösungen sind Produkte von Legendreschen und zugeordneten Legendreschen Polynomen. Für die Koeffizienten dieser Lösungen ergibt sich ein unendliches System linearer Gleichungen mit reellen Koeffizienten. Bis hierhin geht die Nicholsonsche Lösung mit der vorliegenden parallel. Verf. gibt jetzt für jedes obengenannte Lösungsprodukt eine bestimmte Integraldarstellung. Durch Einführung dieser Darstellungen in die ursprünglichen Gleichungen ergibt sich für das Potential in irgendeinem Punkte des Raumes ein bestimmtes Integral. Im Integranden dieses Integrals ist eine Funk-

tion enthalten, welche einer linearen inhomogenen Fredholmschen Integralgleichung genügt. Verf. beweist, daß diese eine und nur eine stetige Lösung besitzt. Weiter beweist er, daß die Neumannsche Reihe der Integralgleichung konvergiert und daß somit das Potential berechnet werden kann. Die Fehler im Verfahren Nicholsons werden einzeln aufgezeigt, und Verf. beweist, daß jenes Verfahren nicht zu einer Lösung führen kann.

Max Strutt.

Tichonov, A. N.: Über die Eindeutigkeit der Lösung des Problems der Elektro-Schürfung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 69, 797—800 (1949) [Russisch].

Es wird die Frage untersucht, ob es in eindeutiger Weise möglich ist, aus der Verteilung des Potentials an der Erdoberfläche in der Umgebung einer mit Gleichstrom gespeisten punktförmigen Elektrode zuverlässige Rückschlüsse auf die Leitfähigkeit der tiefer liegenden Erdschichten zu ziehen. Die Untersuchung dieser Frage wird unter der Annahme durchgeführt, daß die Leitfähigkeit des unter der Erdoberfläche liegenden Halbraumes nur von dem Abstand einer zur Erdoberfläche parallelen Schicht von dieser Oberfläche abhängt. In diesem Fall kann man die Lösung der Aufgabe allgemein herstellen, indem man an der maßgebenden Ausgangsdifferentialgleichung eine Transformation mittels der Besselschen Funktion J_0 durchführt.

Herbert Buchholz.

Bedini, Lidia: Sulla distribuzione della corrente alternata in un sistema di conduttori cilindrici paralleli. Riv. Mat. Univ. Parma 1, 425—431 (1950).

La A. ricava, in base a opportune semplificazioni, un sistema di equazioni integrali e un sistema equivalente di equazioni differenziali che determinano, in modo unico, la distribuzione della corrente alternata in due cilindri conduttori paralleli.

Dario Graffi.

● **Bomke, Hans und J. Gefahrt:** Einführung in die Theorie der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in Leitungen und Hohlkabeln. (Physik und Technik, Band 3.) Stuttgart: Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft 1950. 47 Abb. 163 S. DM 2.50.

Nach einer kurzen Einführung in die Maxwellsche Theorie, die den ersten Abschnitt des Buches ausmacht, wird im zweiten Abschnitt auf den Seiten 23—94 die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen durch metallisch begrenzte hohle Leiter behandelt. Es werden allein der Hohlleiter von rechteckigem und von kreisförmigem Querschnitt berücksichtigt. Um die beim kreisförmigen Hohlleiter unvermeidliche Benutzung der Zylinderfunktionen zu erleichtern, werden im letzten Paragraphen des zweiten Abschnitts die notwendigsten Eigenschaften dieser Funktionen besprochen. Es werden die Begriffe der Grenzfrequenz, der Rohrwellenlänge und der Phasen- und Gruppengeschwindigkeit erläutert und für beide Wellentypen die dafür gültigen Formeln aufgestellt. In einer Reihe von Tafeln, die u. a. auch Feldverteilungsbilder enthalten, werden die Rechnungsergebnisse übersichtlich zusammengestellt. Der Einfluß der Anregung auf die Amplitudenverteilung im Wellenspektrum wird nicht untersucht. Ebenso bleibt in diesem Abschnitt die Dämpfung der Wellen infolge der unvollkommenen Leitfähigkeit der metallischen Begrenzung unberücksichtigt. — Der dritte und letzte Abschnitt des Buches hat Fragen der Energieübertragung auf Leitungen zum Gegenstand. Es handelt sich dabei in erster Linie um den Einfluß des Wellenwiderstandes und der Anpassung auf die Welligkeit der Stromspannungsverteilung. Zunächst werden diese Dinge an den bekannten und übersichtlicheren Verhältnissen auf einer gewöhnlichen Doppelleitung besprochen. Das Kernstück dieser Betrachtungen liegt im § 3, der die Fragen der Anpassung und Spannungstransformation auf der Doppelleitung behandelt. Nach der Entwicklung dieser Begriffe an der Doppelleitung wird ihre Übertragung auf das Hohlleiterfeld vorgenommen. Für den Feldwellenwiderstand werden drei verschiedene Definitionen angegeben. Auch die Frage des reflexionsfreien Abschlusses wird angeschnitten. Schließlich wird im letzten Paragraphen dieses Abschnittes

auch auf die Dämpfung der Hohlleiterwellen eingegangen. — Das Buch kann für die Einführung in diesen schwierigen Gegenstand durchaus empfohlen werden. Nur scheinen dem Referenten einige mehr abseits liegenden Fragen in unnötiger Breite behandelt zu sein.

Herbert Buchholz.

Müller, Rolf: Über die Beugung von Rohrwellen an ebenen Blenden. Z. Naturforsch., Tübingen 5a, 617—621 (1950).

Die Beugung von Hohlleiterwellen im kreiszylindrischen Rohr an konzentrischen Lochblenden wird hier nach dem Prinzip gelöst, die an der Blende entstehenden reflektierten und abgebeugten Wellen aus den unendlich vielen Eigenwellen des Hohlleiters zusammenzusetzen. Für die zunächst unbekannten Amplituden dieser Eigenwellen lassen sich die maßgebenden Bestimmungsgleichungen aus den Grenzbedingungen in der Ebene der Lochblende gewinnen. Im allgemeinen Falle setzen sie sich aus einem Gemisch von TE- und TM-Wellen zusammen. Nur, wenn die einfallende Welle selbst bereits eine axialsymmetrische TE- oder TM-Welle ist, bestehen auch die reflektierten und abgebeugten Wellen nur aus dem einen oder dem anderen Wellentypus.

Herbert Buchholz.

Zakson, M. B.: Über eine Modifikation der Methode zur Berechnung der Erregung von Wellenleitern. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 66, 637—640 (1949) [Russisch].

Die Methode von J. N. Feldt (Grundlagen der Theorie von Spaltantennen, Moskau 1948, russ.) zur Berechnung der Erregung von Wellenleitern und Resonatoren wird auf Hohlleiter angewendet und führt zu einem einfachen Verfahren, wenn es genügt, die erregten Wellen nur außerhalb des Gebietes zu kennen, in dem die aufgeprägten Strahler, z. B. aufgeprägte Stromdichten oder aufgeprägte Felder E_0 in Schlitzen der Wand, sich befinden. Der zylindrische Wellenleiter beliebigen Querschnitts sei unendlich lang und der räumliche Bereich der aufgeprägten Strahler liege zwischen $z = +d$ und $z = -d$ (z in der Achsenrichtung gerechnet). Dann läßt sich für $z \geq d$ der Zustand beschreiben durch die Summe aller „elektrischen“ und „magnetischen“ Wellen im ungestörten Hohlleiter, die nach rechts wandern, deren Hertzsche Potentiale durch

$$\Pi_e^+ = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \psi_n(x, y) e^{-i\gamma_n z} \quad \text{und} \quad \Pi_m^+ = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \varphi_n(x, y) e^{-i\Gamma_n z}$$

gegeben sind. Analog kann man für $z \leq -d$ das Feld durch entsprechende nach links wandernde Wellen beschreiben.

$$\Pi_e^- = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi_n(x, y) e^{i\gamma_n z} \quad \text{und} \quad \Pi_m^- = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \varphi_n(x, y) e^{i\Gamma_n z}.$$

Die φ_n und ψ_n sind die bekannten normierten Eigenfunktionen dess Querschnitts x, y mit der Randbedingung $\psi_n = 0$ und $\partial\varphi_n/\partial\nu = 0$ (ν Normale zur Grenzlinie). Außerdem werden vier Hilfsfunktionen im ganzen Bereich, $-\infty < z < \infty$ eingeführt.

$$\pi_e^+ = \psi_s(x, y) e^{-i\gamma_s z}, \quad \pi_m^+ = \varphi_s(x, y) e^{-i\Gamma_s z},$$

$$\pi_e^- = \psi_s(x, y) e^{i\gamma_s z}, \quad \pi_m^- = \varphi_s(x, y) e^{i\Gamma_s z},$$

die also nach rechts oder nach links wandernde elektrische oder magnetische Wellen einer speziellen Eigenfunktion bedeuten. — Das Lorentzsche Reziprozitätstheorem ergibt angewendet auf den Raum $-d < z < d$

$$\int_{\sigma_1 + \sigma_2} \{ [E, \bar{h}] - [\bar{e}, H] \} d\bar{\sigma} = \frac{4\pi}{c} \int_V \bar{j} \cdot \bar{e} dv - \int_{\sigma_0} [\bar{E}_0, \bar{h}] d\bar{\sigma},$$

wobei σ_1 und σ_2 die Querschnitte $z = \pm d$ bedeuten, σ_0 den Teil der Wand des Hohlleiters für $-d < z < d$ bedeutet, wo sich Schlitze mit eingepprägten Feldstärken befinden. — Um die Koeffizienten a_s, b_s, A_s und B_s zu bestimmen, werden für \bar{e} und \bar{h} nacheinander die aus den Funktionen $\pi_e^+, \pi_e^-, \pi_m^+, \pi_m^-$ folgenden Werte der Felder gesetzt. — Aus der Orthogonalität der Eigenfunktionen und den Grenzwerten von φ und ψ folgt dann

$$a_s = \frac{\frac{4\pi}{c} \int_V \bar{j} \cdot \bar{e}_e^+ dv - \int_{\sigma_0} [\bar{E}_0, \bar{h}_e^+] d\bar{\sigma}}{2k\gamma_s\eta_s^2}, \quad b_s = -\frac{\frac{4\pi}{c} \int_V \bar{j} \cdot \bar{e}_m^+ dv - \int_{\sigma_0} [\bar{E}_0, \bar{h}_m^+] d\bar{\sigma}}{2k\Gamma_s\kappa_s^2},$$

$$A_s = \frac{\frac{4\pi}{c} \int_V \bar{j} \cdot \bar{e}_e^- dv - \int_{\sigma_0} [\bar{E}_0, \bar{h}_e^-] d\bar{\sigma}}{2k\gamma_s\eta_s^2}, \quad B_s = -\frac{\frac{4\pi}{c} \int_V \bar{j} \cdot \bar{e}_m^- dv - \int_{\sigma_0} [\bar{E}_0, \bar{h}_m^-] d\bar{\sigma}}{2k\Gamma_s\kappa_s^2}.$$

W. O. Schumann.

Vajnštejn, L. A.: Die Ausstrahlung unsymmetrischer elektromagnetischer Wellen aus dem offenen Ende eines kreisrunden Wellenleiters. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 74, 485—488 (1950) [Russisch].

The author determines the diffracted field arising when electric and magnetic waves are propagated along a semi-infinite cylindrical tube, whose wall is thin and ideally conducting. He has previously considered the case in which the waves have axial symmetry [this Zbl. 39, 214; Akad. Nauk SSSR, Žurnal Techn. Fiz. 19, 911 (1949), 18, 1543 (1948)]; he now allows them to have azimuthal dependence of the form $\frac{\sin}{\cos} (p\varphi + \varphi_0)$. He expresses the electric and magnetic Hertz vectors as contour integrals involving Bessel and Hankel functions and two unknown functions F and G . He then shows how F and G may be uniquely determined so as to satisfy the conditions of the problem. The argument is given in outline, several calculations being left to the reader. Some numerical charts are given. *F. V. Atkinson.*

Mirimanov, R. G.: Der Widerstand der Ausstrahlung eines Dipols, der sich im Zentrum einer dünnen sphärischen Schale befindet. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 71, 1061—1064 (1950) [Russisch].

Es wird die elektromagnetische Strahlung eines Senders untersucht, der im Mittelpunkt einer sphärischen Hülle mit der Radien r_1 und r_2 steht. In den drei Raumteilen $r \leq r_1$, $r_1 \leq r \leq r_2$ und $r_2 \leq r$ werden die zugehörigen Wellenzahlen jeweils als konstant betrachtet. Besonderes Interesse wird dem Sonderfall gewidmet, in dem die Wellenzahlen in dem inneren und äußeren Bereich einander gleich sind und die Dicke $h = r_2 - r_1$ des mittleren Raumteils nur klein ist. Anscheinend soll diese Lösung einer an sich bekannten Aufgabe in erster Linie als Grundlösung für die kompliziertere Aufgabe dienen, bei der sich die Zwischenschicht selbst aus endlich oder unendlich vielen sphärischen Hüllen verschiedener Stoffbeschaffenheit zusammensetzt. In der Arbeit wird auch noch die durch die Hülle abgestrahlte Leistung berechnet. *Herbert Buchholz.*

Kisunki, G. V.: Variationsprinzipien für (Diffraktions-) Randwertaufgaben der Elektrodynamik. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 66, 863—866 (1949) [Russisch].

Randwertprobleme der Elektrodynamik bei gegebener Stromverteilung, stückweise stetiger Dielektrizitätskonstante und Permeabilität und im Raum vorhandenen vollkommen leitenden Flächen werden als Variationsprobleme formuliert. Dazu wird der Raum durch eine „Aperturfläche“ S in zwei getrennte Teile zerlegt und das Feld auf beiden Seiten der Fläche durch die Stromverteilung auf der jeweiligen Seite sowie durch die zu S tangentialen und zunächst willkürlich angenommenen Komponenten von \mathcal{E} und \mathcal{H} auf der Aperturfläche ausgedrückt. — Die Stetigkeitsbedingungen für das elektromagnetische Feld zu beiden Seiten von S liefern zwei Gleichungen, die sich auch als Lösungen eines Variationsproblems mit zu variierenden $\mathcal{E}_{\text{tang}}$ und $\mathcal{H}_{\text{tang}}$ auf S formulieren lassen. *Josef Meixner.*

Franz, Walter: Multipolstrahlung als Eigenwertproblem. Z. Phys., Berlin 127, 363—370 (1950).

Als Lösungen für die Maxwell'schen Gleichungen bei einer monochromatischen Strahlung mit dem Zeitgesetz $\exp(-i\omega t)$ werden die allgemeinen Formeln für den elektrischen und magnetischen Multipol gegeben. Sie ergeben sich aus der Forderung, daß der Betrag und eine Komponente des gesamten Drehimpulses als Eigenwertlösungen der Feldgleichungen erscheinen. *Herbert Buchholz.*

Phillips, R. S.: The electromagnetic field produced by a helix. Quart. appl. Math. 8, 229—246 (1950).

Verf. befaßt sich mit dem elektromagnetischen Feld einer unendlich dünnen vollkommen leitenden Spirale, welche mit einer einzigen Frequenz angeregt wird. Er nimmt an, daß die Wirkung eines solchen Feldes darin besteht, daß ein einwelliger elektrischer Strom auf dem Spiralleiter erzeugt wird und daß dieser Strom

ntlang der Spirale mit einer reellen Fortpflanzungskonstante in axialer Richtung sich fortpflanzt. Er stellt das elektromagnetische Feld eines solchen Stromes mit Hilfe eines retardierten Vektorpotentials dar, aus welchem der elektrische und der magnetische Vektor durch Differentialoperationen hervorgehen. Die obengenannte Potentialfunktion ist singular und wird vom Verf. zunächst durch ein unendliches Integral und dann, nach längerer Rechnung, durch eine unendliche Reihe dargestellt, deren Glieder Produkte Besselscher und Hankelscher Funktionen sind. Verf. berechnet die Fortpflanzungskonstante und bringt diese mit den Leistungswerten in Zusammenhang.

Max Strutt.

Silver, Samuel and William K. Saunders: The external field produced by a current in an infinite circular cylinder. J. appl. Phys., Lancaster Pa. **21**, 153—158 (1950).

Vorliegende Arbeit befaßt sich mit den Strahlungseigenschaften von Öffnungen in leitenden Oberflächen, insbesondere in den Wänden von Wellenleitern in Form von Kreiszylindern. Der Wellenleiter wird unendlich lang und seine Wände werden als unendlich gut leitend angenommen. Das elektromagnetische Feld ist eine einwertige Funktion der Zeit. Verf. entwickelt die tangentielle elektrische Feldstärke an der Zylinderwand in eine Fourierreihe des Winkels um die Achse. Das Feld außerhalb des Wellenleiters wird als eine Reihe von Zylinderwellen angesetzt. Durch Koeffizientenvergleich in der Öffnung werden die einzelnen Reihenglieder bestimmt. Das Feld in großem Abstand vom Strahler wird asymptotisch dargestellt. Die Überlegungen werden auf einen gleichmäßig angeregten Zylinderspalt und auf einen unendlich langen Axialspalt angewandt.

Max Strutt.

Ledinegg, E. und P. Urban: Über einige Ergebnisse aus der Theorie gekoppelter elektromagnetischer Hohlräume. Acta phys. Austriaca **4**, 180—196 (1950).

Auf Grund der Ergebnisse einer früheren Arbeit über die Theorie der Koppelerschwingungen elektromagnetischer Hohlräume (dies. Zbl. **39**, 420) berechnen Verff. jetzt diese Schwingungen für einige besondere Formen von kreiszylindrischen Hohlräumen mit Lochkoppelung. Sie stellen zunächst die allgemeinen Formeln einer früheren Arbeit zusammen und berechnen dann die Koppelfrequenz eines aus n Hohlräumen bestehenden Systems mit Lochkoppelung. Die betreffende Formel wenden sie sodann an auf den Fall $n = 2$. Hierauf diskutieren sie den Einfluß der Hohlraumdämpfung auf die Ergebnisse und vergleichen dieselben mit Experimenten.

Max Strutt.

Heins, Albert E.: The reflection of an electromagnetic plane wave by an infinite set of plates. III. Quart. appl. Math. **8**, 281—291 (1950).

Das in einer früheren Arbeit mit dem gleichen Titel (dies. Zbl. **29**, 380) unter suchte Problem wird mit den selben Methoden erneut behandelt. Während aber dort nur eine reflektierte Welle angenommen wurde und damit nur ein Wellenlängenbereich $\lambda_1 < \lambda < \infty$ zugelassen war, werden nun zwei reflektierte Wellen angesetzt. Dieser Typ tritt in einem Wellenbereich $\lambda_2 < \lambda < \lambda_1$ auf. λ_1 und λ_2 hängen von der Einfallsrichtung der ebenen Welle, von der Neigung der die Halben benenschar begrenzenden Ebene, und vom Abstand zweier Ebenen in der Schar ab. Die zwischen die Ebenen eindringende Welle ist wieder in genügender Entfernung von den Kanten als ebene Welle angenommen. Die Richtung der einen reflektierten Welle ist von λ unabhängig (ebenso wie für $\lambda_1 < \lambda < \infty$), die der anderen Welle ist dagegen von λ abhängig. Die beiden Reflexionskoeffizienten und die zwischen die Ebenen eindringende Intensität werden berechnet.

Josef Meixner.

Schwinger, Julian: On the classical radiation of accelerated electrons. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. **75**, 1912—1925 (1949).

Verf. entwickelt eine Methode zur Berechnung der Strahlung eines beschleunigten Elektrons. Für eine beliebige Ladungsverteilung ist der dissipative Anteil der

ausgestrahlten Leistung $P(t) = \int \left(\frac{1}{c} \varrho \mathbf{v} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} - \varrho \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) dv + \frac{d}{dt} \int \varrho \Phi dv$. Das zweite Glied dieser Summe kann in allen in Betracht kommenden Fällen gegenüber dem ersten vernachlässigt werden. Die Potentiale Φ und \mathfrak{A} werden mit Hilfe von Fourier-schen Integralen durch Superposition ebener Wellen dargestellt. Auf diese Weise ergibt sich nach einigen Integralumformungen ein Ausdruck für die Richtungs- und Frequenzverteilung $P(n, \omega, t)$ der Strahlungsleistung $P(t)$ (n der Richtungsvektor, ω die Kreisfrequenz). Diese allgemeine Formel wird auf den Fall eines punktförmigen Elektrons angewendet, das auf einer gegebenen Bahn bewegt wird.

Für die Richtungsverteilung $P(n, t) = \int_0^\infty P(n, \omega, t) d\omega$ ergibt sich ein verhältnismäßig einfacher Ausdruck, aus welchem folgt, daß sich die Strahlung bei hohen Geschwindigkeiten stark in der Geschwindigkeitsrichtung konzentriert. Die Frequenzverteilung kann nicht allgemein ausgewertet werden. Eine einfache Überlegung zeigt jedoch, daß im Falle großer Elektronengeschwindigkeiten sehr hohe Frequenzen auftreten müssen. Für die Verteilung dieser hohen Frequenzen führt ein Näherungsverfahren zum Ziel. Es gibt eine kritische Frequenz, hinter der die Strahlungsleistung stark abfällt. Die Berechnung des vollständigen Spektrums gelingt für ein Elektron, welches sich mit konstanter Geschwindigkeit auf einem Kreise bewegt. Die erhaltenen Ergebnisse werden benutzt, um die beim Synchrotron beobachteten Strahlungsvorgänge aufzuklären. Willi Rinow.

Hoffmann, Banesh: Kron's non-Riemannian electrodynamics. Rev. modern Phys., New York **21**, 535—540 (1949).

Die elektrodynamischen Gleichungen eines Systems von gegeneinander bewegten Stromkreisen können nach Maxwell formal in der Gestalt der Lagrange-schen Gleichungen der Mechanik geschrieben und daher in einem Riemannschen Raum gedeutet werden. Nach G. Kron [J. Math. Phys., Massachusetts **13**, 103 (1934); dies. Zbl. **9**, 424] ist es bei rotierenden Maschinen oftmals nützlich, nichtholonome Bezugssysteme einzuführen. Alsdann kann dieser Riemannsche Raum mit einem nichtholonomen Bezugssystem auch als ein nichtriemannscher metrischer Raum mit Torsion aufgefaßt werden. Diese allgemeine Idee wird an dem Beispiel eines Einphasen-Motors erläutert. Willi Rinow.

Kretzmer, Ernest R.: An application of auto-correlation analysis. J. Math. Phys., Massachusetts **29**, 179—190 (1950).

Die PTM (Pulse-time modulation) Systeme, bei denen vom Sender nacheinander einzelne Impulse angewendet werden, die entweder in der Breite der einzelnen Impulse, (PDM), (Pulse-duration modulation), oder in der zeitlichen Aufeinanderfolge der einzelnen Impulse, (PPM), (Pulse-position modulation), moduliert sind, können, durch Störungen, herrührend z. B. von einer zweiten in gleicher Weise arbeitenden Station, oder durch Störungen im Übertragungskanal Interferenzen auftreten, die sich darin äußern, daß im Empfänger die Impulsflanken zeitlich gegen ihre Sollwerte unregelmäßig schwanken. Dadurch entsteht im Empfänger ein Störgeräusch, dessen Leistungsspektrum $\Phi(\omega)$ mit Hilfe der Auto-Korrelationsfunktion I berechnet wird, deren Fouriertransformierte das Leistungsspektrum ist.

$$I = \varphi(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t) f(t + \tau) d\tau, \quad \Phi(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Die Autokorrelationsfunktion einer regelmäßigen Folge rechteckiger Impulse von der Höhe E und der Dauer d im zeitlichen Abstand T ist

$$\varphi_{11}(\tau) = \frac{E^2}{T} (d - |\tau + nT|), \quad |\tau + nT| \leq d$$

Für größere τ ist $\varphi_{11}(\tau) = 0$. — Erleidet eine Seite des Impulses eine zufällige Verschiebung innerhalb der Grenzen $\pm x_0$, so läßt sich durch Mittelung über alle möglichen Lagen der Impulskante mit Berücksichtigung der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Abweichung x eine äquivalente nichtzufällige (non random) verzerrte Pulsform finden, die der Berechnung der Autokorrelationsform zugrunde gelegt wird. Der periodische Teil dieser Funktion bestimmt das Leistungsspektrum des periodischen Teils der Pulsfolge. Der aperiodische Teil bestimmt

s Spektrum des zufälligen Teils der Pulsfolge. Das Leistungsspektrum des periodischen Teils ist ein Linienspektrum, das von dem des ungestörten rein periodischen rechteckigen Impulses nur darin abweicht, daß es in den höherfrequenten Komponenten geringe Leistungsträger enthält. Der aperiodische Teil gibt ein kontinuierliches Spektrum, das diese aus dem periodischen Teil abgeleiteten hochfrequenten Leistungskomponenten enthält. Dieses Spektrum erzeugt das hörbare Zufallsgeräusch im Empfängerausgang. Ist der aperiodische Teil der Korrelationsfunktion $\varphi_{\Delta}(\tau)$, so ist das „noise spectrum“

$$\Phi_{\Delta}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{\Delta}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

und die Geräuschleistung jeweils durch $2\Phi_{\Delta}(\omega)$ gegeben. — Der quantitativen Analyse werden verschiedene Wahrscheinlichkeitsverteilungsgesetze für die zeitlichen Abweichungen innerhalb von $\pm x_0$ der Flanken vom Sollwert zugrunde gelegt, z. B. eine Gaußsche Verteilung, eine flache Verteilung mit konstanter Häufigkeit, bis zu einer Verteilung bestehend aus zwei Dirac-Impulsen bei $\pm x_0$. Die Korrelationsfunktionen werden zunächst für den Fall, daß nur eine Kante des Pulses verschoben wird, berechnet, und daraus das Geräuschleistungsspektrum bestimmt. — Ist die maximale Abweichung x_0 klein (z. B. $1 \mu\text{sek}$) so ergibt sich, daß außerhalb des Hörbereiches (bis 16 kHz) das Geräuschleistungsspektrum für alle Verteilungen praktisch konstant ist. Die gesamte Rauschleistung im Hörgebiet von der Frequenz Null bis etwa $3T$ ergibt sich als $\approx \frac{2}{3} E^2 (\bar{\Delta}t/T)^2$, wobei $(\bar{\Delta}t)^2$ die mittlere zeitliche quadratische Abweichung vom Mittelwert ist. — Anschließend werden die Fälle behandelt, bei denen 1. beide Flanken des Pulses unabhängig voneinander schwanken, 2. beide Flanken gegenphasig und 3. beide Flanken gleichphasig schwanken. Fall 1 ergibt das Doppelte des Geräusches bei einseitiger Schwankung. Die Fälle 2 und 3 ergeben das $\frac{1}{3} \pi^2 D^2$ fache und das $(4 - \frac{1}{3} \pi^2) D^2$ fache des totalen Störgeräusches im Hörgebiet bei einseitiger Schwankung. Schließlich wird der Einfluß zusätzlich vollkommen ausfallender Impulse diskutiert. Das zufällige Ausfallen eines Bruchteils von F Impulsen wird für den Verlauf der Autokorrelationsfunktion und des Leistungsspektrums diskutiert. Die Störleistung im Hörgebiet ergibt sich als $\approx \frac{2}{3} E^2 (F - F^2)$ Watt für eine äquivalente Bandbreite des Geräusches von $1/3T$ in einem praktischen System. *W. O. Schumann.*

ptik:

Tedone, Giuseppe: Su un tipo particolare di mezzi ottici isotropi eterogenei. *Atti dell'Un. mat. Ital.*, III. S. 5, 251—255 (1950).

Verf. fragt: wann können in einem isotropen, aber inhomogenen Medium alle Strahlen, die von einem beliebigen Punkte tangential zur Fläche gleicher Brechzahl ausgehen, in ihrem ganzen Verlauf auf dieser Fläche bleiben? Er kommt zu dem Ergebnis, daß dies dann und nur dann der Fall ist, wenn die Brechzahl der Entfernung von einem festen Punkte umgekehrt proportional ist. Die Flächen gleicher Brechzahl sind also konzentrische Kugeln, die betreffenden Strahlen verlaufen in größten Kreisen. — Eine analoge Aufgabe aus der Potentialtheorie wird kurz erwähnt. *H. Boegehold.*

● **Baker, Bevan B. and E. T. Copson:** The mathematical theory of Huygens' principle. 2nd. ed. London: Oxford University Press 1950 VI, 192 p. 21 s. net.

Mit dem Erscheinen der zweiten Auflage dieser Monographie schließt sich eine empfindliche Lücke, da die erste Auflage von 1939 (dies. Zbl. 22, 228) in deutschen Büchereien kaum vorhanden ist, und das Buch wegen seiner vollständigen und durchsichtigen Darstellung der historischen Entwicklung des Huygensschen Prinzips als unentbehrliches Standardwerk bezeichnet werden muß. Es gliedert sich in fünf Kapitel: I. Analytische Darstellung des Huygensschen Prinzips (in zwei, drei oder mehr Dimensionen). II. Huygenssches Prinzip und Beugungstheorie. III. Huygenssches Prinzip für elektromagnetische Wellen. IV. Sommerfeldsche Beugungstheorie. V. Beugung am ebenen Schirm (Anwendung von Integralgleichungen auf dieses Problem). Die ersten vier Kapitel sind unverändert der ersten Auflage entnommen (demnach auf dem Stand von 1939), das fünfte neu hinzugefügt. Dem eigentlichen Thema des Buches sind die drei ersten Kapitel gewidmet, das vierte Kapitel bringt eine umfassende Darstellung der Sommerfeldschen Theorie der Beugung an der Halbebene, und das fünfte, zurückgreifend auf Arbeiten Lord Rayleighs, einige in den Jahren 1941—1948 neu entwickelte Integralgleichungsmethoden für den ebenen Schirm. — Der Text des Buches ist klar und gut lesbar gefaßt, die Rechnungen sind meist elegant und durchsichtig, doch methodisch nicht ganz

einheitlich (auffällig z. B. in einigen §§ der Verzicht auf die vereinfachenden Hilfsmittel der Vektorrechnung), und die physikalischen Überlegungen sind im allgemeinen mehr referiert, als kritisch oder gar produktiv verarbeitet (s. die Wiedergabe von Kottlers „exakter“ Sprungwert-Formulierung der Beugung am schwarzen Schirm in Kap. II, § 4, oder die etwas dürftige Diskussion der Mängel der Kirchhoffschen Theorie in Kap. II, § 1, 2). Doch liegt, wie gesagt, der große Wert des Buches in der vortrefflichen historischen Darstellung, welche kaum Wünsche offen läßt, vielmehr eine ganze Reihe in der Literatur üblich gewordener Irrtümer berichtigt. Die Kenntnis des „Baker-Copson“ ist daher für jeden, welcher auf diesem Gebiet arbeitet oder sich in bequemer und zuverlässiger Weise einführen lassen will, unerläßlich. *W. Franz.*

Gerjuoy, E.: Refraction of waves from a point source into a medium of higher velocity. *Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 73, 1442—1449 (1948).*

Kampen, N. G. van: An asymptotic treatment of diffraction problems. II. *Physica, The Hague 16, 817—821 (1950).*

Ein vom Verf. angegebenes Verfahren [*Physica, The Hague 14, 575—590 (1948)*], die Kirchhoffsche Beugungsformel asymptotisch für große Wellenzahlen (nach fallenden Potenzen der Wellenzahl) mittels der Methode der stationären Phase zu entwickeln, wird in vereinfachter Form auf einige Beispiele angewandt.

W. Franz (Münster).

Lenz, Friedrich: Annäherung von rotationssymmetrischen Potentialfeldern mit zylindrischen Äquipotentialflächen durch eine analytische Funktion. *Ann. Phys., Leipzig, VI. F. 8, 124—128 (1950).*

Es wird eine Funktion angegeben, welche dem asymptotischen Verhalten der Potentialfelder von Rohrlinsen (Polschuhlinen) Rechnung trägt und den Feldverlauf in seiner Abhängigkeit von Polschuhbohrung und Spaltweite magnetischer Elektronenlinsen in guter Näherung wiedergibt. Die Güte der Näherung wird für symmetrische Felder sowie für ein unsymmetrisches Feld durch Vergleich mit numerisch berechneten Feldverteilungen durch Kurven veranschaulicht.

Walter Glaser.

Funk, Paul: Über das Newtonsche Abbildungsgesetz in der Elektronenoptik. *Acta phys. Austriaca 4, 304—308 (1950).*

Die vom Ref. gemeinsam mit E. Lammel [*Mh. Math. Phys. 50, 289—297 (1943)*; dies. Zbl. 28, 58] gelöste Aufgabe der Bestimmung aller elektrisch-magnetischen Abbildungsfelder, in denen die gewöhnliche Linsengleichung gilt, ist mit der folgenden Fragestellung gleichbedeutend: Wann sind bei einer homogenen linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung der Form $y'' + p(x)y = 0$ zwei aufeinander folgende Nullstellen x und \bar{x} durch eine Gleichung der Form $ax\bar{x} + bx + c\bar{x} + d = 0$ verbunden. Verf. gibt die Lösung in folgender Gestalt: Wenn y_1 und y_2 zwei partikuläre Integrale der obigen Differentialgleichung sind und der Winkel φ durch $\operatorname{tg} \varphi = y_2/y_1$ definiert ist, so muß $p(x)$ die Gestalt $p(x) = [1 - P(\varphi)]/(y_1^2 + y_2^2)^2$ haben, wobei $P(\varphi)$ eine beliebige periodische Funktion von φ mit der Periode π ist.

Walter Glaser.

Verster, N. F.: Spherical aberration of a double focusing beta ray spectrometer. *Physica, The Hague 16, 815—816 (1950).*

Die dem Hauptkreis $r = r_0, z = z_0$ benachbarte Elektronenbahn $\varrho = (r - r_0)/r_0$ und $\zeta = (z - z_0)/z_0$ wird in der Gestalt $\varrho = \sum_1^{\infty} a_n \sin^n k \varrho, \zeta = 0$ angesetzt. Damit die sphärische Aberration von höherer Ordnung verschwindet, muß ϱ den Bewegungsgleichungen unabhängig vom Ausgangswinkel genügen. Die Entwicklungskoeffizienten b_1, b_2 , usw. für das zur Kreisebene senkrechte Feld

$$B_z(\varrho) = B_0(1 + b_1\varrho + b_2\varrho^2 + \dots)$$

ergeben sich aus dieser Bedingung als bestimmte Funktionen von k , welche angegeben werden. Ebenso werden alle Entwicklungskoeffizienten a_n ($n > 1$) in ϱ durch a_1 und k ausgedrückt.

Walter Glaser.

Relativitätstheorie:

Epheser, H. und T. Schlomka: Flächengrößen und elektrodynamische Grenzbedingungen bei bewegten Körpern. Ann. Phys., Leipzig, VI. F. 8, 211—220 (1950).

Les AA. donnent la forme relativiste covariante suivante aux équations de continuité du champ et de l'induction à travers la surface d'un corps polarisé:

$$\Delta H_{ik} n^k = g_i, \quad \Sigma \Delta F_{ij} n_k = 0;$$

somme s'entend par permutation circulaire, n^k est le vecteur unité normal à l'hyper-surface tridimensionnelle engendrée dans l'Univers par le contour bidimensionnel du corps; g_i est un quadrivecteur d'Univers qui, dans le référentiel propre, a pour composantes les densités superficielles ordinaires de courant et de charge; il est intéressant de remarquer que $g_i u^i = 0$.

O. Costa de Beauregard.

Møller, C.: On the Thomas effect in rigid accelerated systems of reference. Mat. Tidsskr. B, København 1950, Festskr. t. J. Nielsen, 138—145 (1950).

Verf. zeigt, daß die als Thomas-Effekt bekannte Präzessionsbewegung eines ruhenden, bewegten und rotierenden Systems sich aus elementaren kinetischen Betrachtungen der speziellen Relativitätstheorie herleiten läßt. Die Lösung eines hierbei aufgestellten Gleichungssystems ermöglicht außerdem, im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie, ein starres Koordinatensystem aufzufinden, dessen Ursprung relativ zu einem Inertialsystem beliebig bewegt ist.

Urich.

Udeschini, Paolo: Le equazioni di prima approssimazione nella nuova teoria relativistica unitaria di Einstein. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. S. 9, 256—261 (1950).

Die bekannten Gleichungen der Einsteinschen Theorie [vgl. Einstein und Strauß, Ann. Math., Princeton, II. S. 47, 731 (1946)] werden in erster Näherung gelöst für den Fall, daß $g_{ik} = \delta_{ik} + b_{ik}$ und daß die b_{ik} klein sind. Die Lösungen stimmen überein mit den von Einstein und Strauß bei etwas anderen Voraussetzungen erhaltenen (vgl. Strauß, dies. Zbl. 39, 423). Charakteristisch für diese Lösungen ist, daß das elektromagnetische Feld und das Gravitationsfeld bei dieser ersten Näherung rein getrennt bleiben. Daß dies aber schon bei der zweiten Näherung nicht mehr der Fall ist, verspricht Verf. in der nächsten Mitteilung zu zeigen.

Jan A. Schouten.

Ingraham, Richard L.: Contributions to the Schrödinger non-symmetric affine unified field theory. Ann. Math., Princeton, II. S. 52, 743—752 (1950).

This paper deals with the non symmetric affine unified theory of Schrödinger and de Broglie. Irish Acad. A 51, 163 (1947)]. The field equations are split into parts, which are functions only of the metric $g_{(\mu\lambda)}$ and parts which vanish if $f_{\mu\lambda} \doteq g_{[\mu\lambda]}$ vanishes. Several conditions are imposed upon the $g_{\mu\lambda}$ in order to make the field equations degenerate into pure relativity equations and an analogue of the Maxwell equations. An exact solution is given based upon solutions of certain differential equations but it is not quite clear that these latter solutions exist.

Johannes Haantjes.

Atomphysik.

Quantentheorie:

Rideau, Guy: La transposition dans l'espace des moments en théorie des collisions. C. r. Acad. Sci., Paris 231, 949—951 (1950).

Verf. gibt eine Integralgleichung für die dreidimensionale Fouriertransformierte der Schrödingerschen Wellenfunktion an, die besonders für die stationäre Behandlung von Stoßproblemen geeignet ist [Bem. des Ref.: die vom Verf. am Schluß formulierte Regel ist unnötig, weil man von $x \cdot f = g$ nur auf $f = g/x + c \cdot \delta(x)$ schließen kann. Vgl. P. A. M. Dirac, The principles of quantum mechanics, 3. ed., Oxford 1947, S. 61; dies. Zbl. 30, 48].

Gerhard Höhler.

Rideau, Guy: La transposition de Fourier de l'équation de Dirac. C. r. Acad. Sci., Paris **231**, 1286—1288 (1950).

Im Anschluß an eine frühere Note (s. vorsteh. Ref.) gibt Verf. eine Integralgleichung für die vierdimensionale Fouriertransformierte des Dirac-Spinors bei vorgegebenem äußeren Feld an. Umrechnung und Rücktransformation liefert eine der Diracgleichung äquivalente Integralgleichung für den Dirac-Spinor. Der enge Zusammenhang mit der Feynmanschen Theorie scheint Verf. entgangen zu sein (dies. Zbl. **37**, 124). *Gerhard Höhler.*

Cini, Marcello and Luigi A. Radicati: A variational principle for time-dependent problems. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. **80**, 300—301 (1950).

Verff. geben im Anschluß an die Theorie des Positrons von Feynman (dies. Zbl. **37**, 124) ein Variationsprinzip an und vergleichen es mit Formulierungen von Schwinger (dies. Zbl. **35**, 132). *Gerhard Höhler.*

Parzen, George: On the scattering theory of the Dirac equation. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. **80**, 261—268 (1950).

Im Falle der Schrödingergleichung ist die Bornsche Näherung für Stoßprozesse immer brauchbar, wenn die Energie des einfallenden Teilchens hoch genug ist. Bei der Diracgleichung hingegen nähert sich, wie Verf. zeigt, die Phasenverschiebung

δ_l bei wachsender Energie einer von l unabhängigen Konstanten $\delta_\infty = - \int_0^\infty V(r) dr$, falls $V(r)$ bei $r = 0$ keinen Pol hat. $|\delta_\infty| \ll 1$ ist die Bedingung für die Gültigkeit der Bornschen Näherung bei hohen Energien. Abschließend gibt Verf. ein Variationsprinzip und zwei exakte Ausdrücke für δ_l an. *Gerhard Höhler.*

Costa de Beauregard, Olivier: Sur le hachage d'une onde corpusculaire. C. r. Acad. Sci., Paris **227**, 1210—1212 (1894).

Für die Beugung einer Materiewelle an einem ebenen Schirm mit zeitlich veränderlicher Blendenöffnung wird das Kirchhoffsche Beugungsintegral angeschrieben. Im Falle eines Dirac-Teilchens sind in der formalen Lösung auch Zustände mit negativer Energie und solche mit komplexem Ausbreitungsvektor enthalten. Eine physikalische Diskussion dieser Lösungsbestandteile wird nicht gegeben. *Haag.*

Matthews, P. T.: The S-matrix for meson-nucleon interactions. Phil. Mag., J. theor. exper. appl. Phys., London, VII. S. **41**, 185—195 (1950).

Dyson hat gezeigt (dies. Zbl. **32**, 237, **33**, 142), daß man in der Quantenelektrodynamik die Divergenzen der S-Matrix durch Renormierung von Masse und Ladung beseitigen kann. Verf. versucht eine Übertragung der Methoden auf die Nukleon-Meson-Wechselwirkung. In einer früheren Arbeit [Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. **76**, 1254 (1949)] behandelte er ein neutrales Vektorfeld mit vektorieller Kopplung in dieser Arbeit ein skalares und ein pseudoskalares Feld mit skalarer Kopplung. Während die Streuung von Licht an Licht endlich bleibt, führt die Streuung von Mesonen aneinander zu einer neuen Divergenz, so daß Verf. neben der Renormierung noch einen Zusatzterm zum Kopplungsglied in der Lagrangefunktion benötigt, um eine endliche S-Matrix zu erhalten [Vgl. hierzu auch F. Rohrlich, Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. **80**, 666—687 (1950)]. — Bei andern Feldern und Kopplungen scheitert eine Übertragung der Methode daran, daß die Beschränkung der primitiven, divergenten Graphen auf eine kleine Anzahl nicht eintritt. *Gerhard Höhler.*

Wick, G. C.: The evaluation of the collision matrix. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. **80**, 268—272 (1950).

Das Verfahren von Dyson (dies. Zbl. **32**, 237, **33**, 142) zur Auswertung der S-Matrix wird unter Berücksichtigung der Methode von Houriet und Kind [Helvetica phys. Acta **22**, 319—330 (1949)] vereinfacht. Dazu definiert Verf. „S-Produkte“ von Operatoren (alle Vernichtungsoperatoren stehen rechts von allen Erzeugungsoperatoren) und „T-Produkte“ (die Reihenfolge ist durch die Zeitkoordi-

en in den Argumenten der Operatoren gegeben, bis auf einen Vorzeichenfaktor (dies Dysons P -Produkte) und leitet einen algebraischen Satz über die Darstellung eines T -Produkts als Summe von S -Produkten her. *Gerhard Höhler.*

Wessel, Walter: On infinite relativistic particle matrices. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76, 1512—1519 (1949).

Verf. hat in einer vorangehenden Arbeit die Poissonklammern zwischen den Dichtegrößen der Diracschen Theorie (Strom, Ladung, elektrisches Moment, magnetisches Moment, Spin) untersucht. Er geht nunmehr korrespondenzmäßig zu den entsprechend gebildeten Vertauschungsrelationen über. Infolge einer von der üblichen Auffassung abweichenden Realitäts- bzw. Hermitezitätsforderung der Darstellungsmatrizen (ein Teil der Vertauschungsrelationen bildet die Lie-Algebra einer homogenen vierdimensionalen Gruppe vom Trägheitsindex 1, also der Lorentzgruppe im Reellen) gibt es keine vollständig diskreten Darstellungen mehr, die eine Hälfte der sechzehn Matrizen hat kontinuierliches Spektrum. Die Darstellung geht in ganzen rationalen Funktionen der Oszillatormatrizen p und q ($[p, q] = 1$). Verf. erhält Spezialfälle der von Harish-Chandra und Bargmann allgemein klassifizierten Darstellungen. Es kennzeichnet den Weg des Verf., daß er, ausgehend von Dichtegrößen, die mit den diskreten Diracmatrizen gebildet sind, schließlich zu kontinuierlichen Matrizen zurückkommt, die vermutlich in gewisser Näherung die Diracgleichung wieder ergeben. *Leo Bauer.*

Couteur, K. J. Le: The structure of linear relativistic wave equations. I. Proc. R. Soc., London, A 202, 284—300 (1950).

Es wird die Struktur von linearen relativistischen Wellengleichungen der Form $(\alpha_\mu \partial/\partial x^\mu - \chi)\psi = 0$ studiert, wobei die α_μ als endliche quadratische Matrizen angenommen werden und χ eine nichtverschwindende Konstante sein soll. Die α_μ bestimmen sich aus ihren Vertauschungsrelationen mit sechs Größen $I_{\mu\nu}$, die eine Darstellung der Lorentztransformation (mit Reflexion) bilden. Jede Darstellung wird durch zwei Parameter p, q charakterisiert. Darstellungen der vollen Lorentztransformation haben die Form

$$I_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} I_{\mu\nu}(p, q) & 0 \\ 0 & I_{\mu\nu}(q, p) \end{pmatrix}.$$

Die Bildung der α_μ geht Verf. aus von der direkten Summe einer Anzahl von solchen Darstellungen:

$$I_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} I_{\mu\nu}(a) & & & \\ & I_{\mu\nu}(b) & & \\ & & I_{\mu\nu}(c) & \\ & & & \ddots \end{pmatrix},$$

bei die $I_{\mu\nu}(a), I_{\mu\nu}(b), \dots$ von der Form (*) sind. Die α_μ koppeln dann jeweils zu solchen Darstellungen: $\alpha_\mu = C_{ab} (a | \alpha_\mu | b)$, wobei die Kopplungskonstanten C_{ab} willkürlich bleiben. Es genügt, α_0 zu kennen; die $\alpha_l, l = 1, 2, 3$, entstehen dann aus $\alpha_l = \alpha_0 I_{0l} - I_{0l} \alpha_0$. Die α_0 genügen einer Minimalgleichung $\alpha_0 (\alpha_0^2 - j_1^2 - j_2^2) \dots = 0$. Die (reellen) j -Werte bestimmen eine Reihe von Massen der Form m_j . Außerdem erscheint jede Darstellung der Form (*) mit Eigenwerten $p + q \geq s$ mit $|p - q|$ des Spins s . Verlangt man, daß alle Partikelzustände willkürfrei durch die Masse, den Spin und die Ladung (Vorzeichen von j) beschrieben werden können, so läßt sich zeigen, daß der Spin nur die Werte $S_H, S_H - 1, \dots$ bis $0, \frac{1}{2}$ annehmen kann, wobei $S_H = p + q - 1$ ist. Die Diskussion erfolgt mit Hilfe von Kopplungsdiagrammen, die für jede Wellengleichung charakteristisch sind.

Walter H. Wessel.

Couteur, K. J. Le: The structure of linear relativistic wave equations. II. Representations. Proc. R. Soc., London, A 202, 394—407 (1950).

Beispiele zu der allgemeinen Theorie in I (s. vorsteh. Referat) mit diagonalem s. Es wird gezeigt, daß man die in I freibleibenden C_{ab} bestimmen kann, wenn das Massen-Spin-Spektrum bekannt ist. In gewissen, leicht zu erkennenden Fällen sind die Massen-Eigenwerte nicht alle unabhängig. Es läßt sich auch ein Teilchen konstruieren, das in seinem Zustande der tiefsten Masse ein magnetisches Moment gleich dem des Protons hat.

Walter H. Wessel.

Lehmann, H.: Zur Regularisierung der klassischen Elektrodynamik. Ann. Phys., Leipzig, VI. S. 8, 109—123 (1950).

Es werden die Folgerungen untersucht, die sich ergeben, wenn man die klassische Elektrodynamik „regularisiert“ (nach dem Muster der in letzter Zeit in der Quantenelektrodynamik mit Erfolg verwendeten Verfahren). Man ersetzt dazu die singulären Greenschen Funktionen der Maxwell'schen Theorie $D^{\text{ret}}(x)$ und $D^{\text{av}}(x)$ — entsprechend retardierter resp. avancierter Ausstrahlung einer raumzeitlichen Punktquelle — durch reguläre. Es bieten sich hierzu zwei Möglichkeiten: 1. Beide Funktionen werden gleichartig modifiziert. Man kann dann nicht mehr in allen Fällen lineare Feldgleichungen aufstellen, und vor allem läßt sich kein Energie-Impuls-Tensor finden, aus dem nicht die Möglichkeit der Ausstrahlung von Quanten negativer Energie folgen würde. Allerdings werden diese Folgerungen hinfällig, wenn man auf Invarianz der Theorie gegenüber Zeitumkehr verzichtet; eine Untersuchung dieses Falles ist im Gange. 2. D^{ret} und D^{av} werden so abgeändert, daß ihre Differenz ungeändert bleibt. Dann lassen sich Feldgleichungen und ein Energie-Impuls-Tensor aufstellen. Das wirksame Feld ist zwar nicht in Strenge retardiert, doch tritt keine Emission negativer Quanten auf. Die Selbstenergie des Elektrons wird endlich, seine Selbstspannung verschwindet. Dieselbe Theorie läßt auch eine andere Formulierung zu, in der die Maxwell'schen Gleichungen ungeändert bleiben und dafür die Kopplung mit den Elektronen, d. h. deren Bewegungsgleichung, abgeändert wird.

M. R. Schafroth.

Thirring, W.: On a fourth-order meson-equation. Phil. Mag., J. theor. exper. appl. Phys., London, VIII. S. 41, 653—662 (1950).

Verf. untersucht mit den Methoden von Schwinger und Dyson die auch von Bhabha (dies. Zbl. 36, 273) behandelte Feldgleichung $(\square - \mu^2)^2 \Phi(x) = 0$, bei der die r^{-3} -Singularität in der Tensorkraft nicht auftritt. Die Selbstenergie zweiter Ordnung wird endlich, es verbleiben jedoch divergente Terme in höheren Näherungen. Weitere Schwierigkeiten derartiger Feldgleichungen werden von Pais und Uhlenbeck (s. nachsteh. Referat) diskutiert.

Gerhard Höhler.

Pais, A. and G. E. Uhlenbeck: On field theories with non-localized action. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 79, 145—165 (1950).

Verff. untersuchen systematisch die Möglichkeiten für eine Beseitigung der Divergenzen in der Feldtheorie durch lineare Verallgemeinerung der Feldgleichungen. Der Typ $\prod_{i=1}^N (\square - \kappa_i^2) \psi = -\rho$ steht in engem Zusammenhang zur Regularisierung von Pauli und Villars. Divergenzen werden vermieden, jedoch verhindert das Auftreten negativer Energien eine vernünftige Definition des Vakuums. [Vgl. aber Green, Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 82, 296 (1951).] Unendliche N , komplexe oder mehrfach auftretende gleiche κ_i bringen keine Verbesserung. Auch die entsprechende Verallgemeinerung der Diracgleichung scheint nicht weiterzuführen. Feldgleichungen, die neben dem Produkt noch einen Faktor $\exp[f(\square)]$ enthalten, haben nicht mehr den von L. Gårding (dies. Zbl. 36, 340) näher untersuchten Fortpflanzungscharakter hyperbolischer Gleichungen endlicher Ordnung; in speziellen Fällen kann man von einem „Fortpflanzungscharakter im Mittel“ sprechen. Die Greenschen Funktionen sind wie bei McManus (dies. Zbl. 31, 230) im Zwischengebiet von Null verschieden, so daß man nicht erwarten kann, daß das Verhalten eines Systems durch kausale Entwicklung eines Zustandsvektors be-

schreibbar ist. Die Arbeit schließt mit Vermutungen über die damit notwendige Abänderung der Quantenmechanik.

Gerhard Höhler.

Thirring, W.: Quantization of higher order equations. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 79, 703—705 (1950).

Zur Quantisierung von Feldgleichungen höherer Ordnung wird ein Verfahren vorgeschlagen, das einfacher als das gewöhnliche, aber im Ergebnis äquivalent ist. Man bestimmt zunächst diejenigen Funktionen, die für die rechte Seite des Kommutators in der Wechselwirkungsdarstellung in Betracht kommen. Bei einer Minusvertauschungsrelation sind dies die ungeraden, lorentzinvarianten Lösungen der Vakuumfeldgleichungen. Dann wählt man diejenige aus, die zusammen mit der Bewegungsgleichung $i \delta \Psi(\sigma) \delta \sigma(x) = H \Psi(\sigma)$ (Schwinger, dies. Zbl. 32, 94) nach Transformation ins Heisenbergbild zu dem angenommenen Wechselwirkungsmitglied führt. Als Beispiel wird ein skalares Feld mit der Vakuumfeldgleichung $\prod_{i=1}^n (\square - m_i) \Phi = 0$ behandelt. Die Kommutatorfunktion ist eine im Pauli-Villarsschen Sinne regularisierte D -Funktion. Vgl. hierzu auch Pais und Uhlenbeck (vorsteh. Referat).

Gerhard Höhler.

Irving, J.: Non-physical solutions in classical finite electron theory. Proc. phys. Soc. London, Sect. A 63, 1125—1131 (1950).

Weitere Untersuchung der linearisierten Bewegungsgleichung eines Elektrons nach der Theorie von Peierls und McManus. Vgl. dies. Zbl. 31, 230.

Gerhard Höhler.

Bopp, Fritz: Elektronentheoretische Untersuchung des Massenspektrums der Elementarteilchen. Z. Phys., Berlin 125, 615—628 (1949).

Ausgehend von einer Theorie vom Mieschen Typus mit linearem Zusammenhang zwischen Feld- und Erregungstensor findet Verf. eine Wellengleichung, die für ein kräftefreies ruhendes Teilchen ein Spektrum von Energiewerten liefert, die mit den Massen der Elementarteilchen zu identifizieren wären. Vorderhand sind noch verschiedene Möglichkeiten offen wegen Unkenntnis des Spins der Mesonen.

M. R. Schafroth.

Möller, C.: Sur la dynamique des systèmes ayant un moment angulaire interne. Ann. Inst. Henri Poincaré 11, 251—278 (1949).

Verf. untersucht, wie in einer (nichtlinearen) Feldtheorie gewisse Raumpunkte ausgezeichnet werden können, die als Schwerpunkte von Punktpartikeln mit Spin fungieren. Dabei wird das Feld durch den Energie-Impulstensor definiert. Der Schwerpunkt wird berechnet mit einer Massenverteilung, die der Energie des Feldes entspricht. Es ergibt sich weitgehende Übereinstimmung mit den klassischen Bewegungsgleichungen von Mathisson und Weyssenhoff für Spinpartikel. Schließlich ist diskutiert, wie in einer quantisierten Theorie die Unschärferelation in die Bestimmung des Schwerpunkts eingreift.

Leo Bauer.

Petiau, Gérard: Sur une extension de la théorie du corpuscule de spin $h/2\pi$ permettant de représenter un méson possédant plusieurs états de masse. C. r. Acad. Sci., Paris 227, 825—827 (1948).

Ziel des Verf. ist es, Wellengleichungen für Teilchen vom Spin 1 zu gewinnen, welche mehrere Masseneigenwerte zulassen. Im Anschluß an van Isacker (dies. Zbl. 37, 282) werden zwei verschiedene Ansätze angegeben. Die Spinoperatoren sind Verschmelzungsprodukte zweier Sätze von Dirac-Matrizen (méthode de fusion). Bei dem ersten Ansatz ist der Massenoperator so gewählt, daß die Ausreduktion in eine 10-, 5- und 1-komponentige Wellengleichung in der üblichen Weise gelingt, wobei in jedes irreduzible System ein anderer Massenwert eingeht. Der zweite Ansatz ist wesentlich undurchsichtiger.

Haag.

Slansky, Serge: Sur le principe de décomposition spectrale dans la théorie des particules de spin supérieur à $1/2$. C. r. Acad. Sci., Paris 231, 892—894 (1950).

Suite des remarques de l'A. concernant l'application des principes généraux de la mécanique ondulatoire aux particules de spin multiple de $1/2$ obtenues par fusion. On montre que la forme usuelle du principe de décomposition spectrale n'est légitime que pour les opérateurs dont les fonctions propres satisfont les équations d'onde („équations de condition“). Ceci est le cas pour les opérateurs d'impulsion-énergie et de spin, mais non pour les opérateurs de coordonnées; les résultats indiqués dans deux précédentes notes de l'A. se trouvent ainsi corroborés. *Costa de Beauregard.*

Costa de Beauregard, Olivier: La théorie de l'interaction électromagnétique de Wheeler et Feynman. Rev. sci., Paris 88, 34—40 (1950).

Darstellung und Diskussion der Absorbertheorie von Wheeler und Feynman [Rev. modern Phys., New York 17, 157—181 (1945) und dies. Zbl. 34, 278].

Gerhard Höhler.

Mercier, André: Relativité et statistique. Proc. Akad. Wet., Amsterdam 53, 50—58 (1950).

Verf. meint, im Rahmen einer allgemeineren Erörterung in der Relativitätstheorie und der klassischen statistischen Mechanik allein bereits Ansatzpunkte zur Quantentheorie sehen zu können.

Wilhelm Macke.

Maravall Casesnoves, Darío: Die Quantelung der Masse und der Geschwindigkeit und die Unschärfe der absoluten Ruhe in der Wellenmechanik. Euclides, Madrid 10, 336—339 (1950) [Spanisch].

Maravall Casesnoves, Darío: Berechnung der Elektronen- und Protonenzahl des Universums. — Beweis, daß die Lage des Photons keine Observable in der Wellenmechanik ist. Euclides, Madrid 10, 427—432 (1950) [Spanisch].

Bau der Materie:

Bock, Herbert: Über die Wärmeleitung von Gasgemischen. Ann. Phys., Leipzig, VI. F. 8, 134—155 (1950).

Verf. versucht, der Lösung des bisher noch völlig offenen Problems, wie sich die Wärmeleitfähigkeit λ eines Gasgemisches aus den λ_j -Werten für die einzelnen Komponenten berechnen läßt, durch die Untersuchung sehr spezieller, äußerst vereinfachter Gasmodelle bzw. Ersatzbilder näher zu kommen. Demnach erscheint es plausibel, daß λ aus einer Art harmonischem Mittel zu berechnen ist, wobei aber an Stelle der gewöhnlichen Konzentrationen „wirksame Konzentrationen“ einzusetzen sind, die sich aus den Molzahlen nach Division derselben durch die Quadratwurzeln aus ihren Molmassen in üblicher Weise berechnen. An Hand von ausführlichen Tabellen über vorliegende Meßresultate wird die Brauchbarkeit dieser Interpolationsformel nachgewiesen.

Fritz Sauter.

Hammad, A.: Scattering of light by anisotropic gas molecules. Proc. math. phys. Soc. Egypt, Cairo 4, 3—14 (1949).

Die Rayleigh-Streuung an anisotropen Teilchen, deren Polarisierbarkeit also durch einen Tensor dargestellt wird, wird berechnet, der Depolarisationsgrad als Funktion des Streuwinkels angegeben. Entsprechende Rechnungen mit übereinstimmendem Ergebnis finden sich bei Chandrasekhar, Radiative transfer, Kap. 1, § 18, Oxford 1950 (dies. Zbl. 37, 432).

Gerd Burkhardt.

Ecker, Günter: Theorie der Polarisation des Kanalstrahllichtes. I. Elementarprozeß. Z. Phys., Berlin 128, 511—529 (1950).

Bei Kanalstrahlen sind bewegtes und ruhendes Leuchten polarisiert. Von den zahlreichen im Strahl vorkommenden Prozessen werden für die hinsichtlich der Polarisation wesentlichen einfache Modellvorstellungen entwickelt und die Veränderung der Besetzungswahrscheinlichkeiten durch matrizenmechanische Störungsrechnung ermittelt.

Kreyßig.

Lax, Benjamin, W. P. Allis and Sanborn C. Brown: The effect of magnetic field on the breakdown of gases at microwave frequencies. J. appl. Phys., Lancaster 21, 1297—1304 (1950).

Die Theorie des Durchschlags in einem hochfrequenten elektrischen Feld, dem ein konstantes Magnetfeld überlagert ist, wird im ersten Teil der Arbeit nach folgender Methode behandelt, die den Vorteil physikalischer Übersichtlichkeit hat: Aus der Lösung der Bewegungsgleichung $m \dot{\mathbf{v}} = -e \cdot \mathcal{E} - e \mathbf{v} \times \mathcal{B}$ für die Elektronen $\sim \exp(i \omega t)$ kann man durch Mittelung über die Phase des elektrischen Feldes, über die Zeit, während derer sich das Elektron frei bis zum nächsten Zusammenstoß bewegt, und über die Richtung seiner Geschwindigkeit nach einem Stoß das mittlere Verschiebungsquadrat und die mittlere Energieaufnahme zwischen zwei Stößen rechnen. Daraus ergibt sich eine Aussage darüber, wie sich im Mittel ein Elektron verhält, bis es entweder ein Gasteilchen ionisiert oder infolge der Diffusion nach außen entweicht. Die Bedingung für einen Durchschlag ist dann die, daß diese beiden Möglichkeiten gleichwahrscheinlich sind. Im zweiten Teil handelt es sich um Folgerungen aus der Transportgleichung

$$C = \frac{\partial F}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{v} F) - \nabla_v \cdot \frac{e \mathcal{E} F}{m} - \nabla_v \cdot \frac{e}{m} \mathbf{v} \times \mathcal{B} F,$$

wo F die Verteilungsfunktion und C die Elektronenerzeugung durch Stöße pro Volumeneinheit des Phasenraumes ist. ∇ und ∇_v sind Gradienten im Konfigurations- bzw. Geschwindigkeitsraum. Es ergibt sich eine Differentialgleichung für die Verteilungsfunktion, deren Lösung der wesentliche Ausgangspunkt für die Behandlung entladungstheoretischer Probleme sein kann. So z. B. kann man einen Diffusionskoeffizienten definieren, der den Charakter eines Tensors hat. Wahrscheinlich würde die Arbeit etwas leichter verständlich werden durch die Kenntnis einer Reihe anderer Arbeiten, auf die in den Fußnoten verwiesen ist.

Rudolf Seeliger.

Bogdanoff, John Lee: On the theory of dislocations. J. appl. Phys., Lancaster 21, 1258—1263 (1950).

Volterra hat die möglichen elastischen Lösungen für einen Kreiszylinder behandelt, wo die Verschiebungen längs einer radialen Schnittfläche Unstetigkeiten aufweisen, die Verzerrungen und Spannungen aber stetig sind (abgesehen von einer punktförmigen Singularität bei der Achse). In dieser Arbeit wird die Voraussetzung der Stetigkeit von Verzerrungen und Spannungen fallen gelassen. Lediglich die Oberflächenkräfte an der Schnittfläche werden wegen der Gleichgewichtsbedingungen gleich angenommen. Die Ergebnisse werden diskutiert, im wesentlichen handelt es sich um eine Überlagerung von Versetzungen Volterraschen Typs, welche längs der Schnittfläche verteilt sind.

Günther Leibfried.

Hoerni, Jean: Diffraction des électrons par le graphite. Helvetica phys. Acta 23, 587—622 (1950).

Die dynamische Theorie der Elektronenbeugung wird auf Graphit angewendet; die Ergebnisse werden mit der Methode von Kossel und Möllenstedt (Durchstrahlung mit konvergenten Bündeln von Elektronenstrahlen) experimentell bestätigt. Im Zweistrahlfall wurde Übereinstimmung mit der Theorie von MacGillivray gefunden und zur Berechnung der Kristalldicke und gewisser Strukturfaktoren benützt. Im Fall von drei oder vier starken Strahlen wird der Begriff der räumlichen Dispersionsfläche („surface de dispersion efficace“) eingeführt, der die Bedeutung der beobachteten Erscheinungen erleichtert (Verschiebung der Interferenzstreifen, ihr besonderes Verhalten im Innern der Kikuchibänder von niederen Ordnungen). — Die Untersuchung der verschiedenen Graphitarten führte auf neue Erkenntnisse über die Art des Aufbaus der aufeinanderfolgenden Schichten; insbesondere wurde an einem Einkristall die Existenz der von Lipson und Stokes (Proc. R. Soc. London, A 181, 101 (1942)) mit Röntgenstrahlen an Pulverdiagrammen entdeckten rhomboedrischen Graphitmodifikation bestätigt.

Alfred Seeger.

Hovi, Väinö: On Wasastjerna's theory of the heat of formation of solid solutions. Comment. phys.-math., Soc. Sci. Fennica 15, Nr. 12, 14 S. (1950).

Die Arbeit knüpft an eine Veröffentlichung von J. A. Wasastjerna an (dies. Zbl. 34, 430), in der die Bildungswärme eines Mischkristalls aus seinen Komponenten berechnet wird, wenn diese 2 Ionenkristalle sind von gleichem Gittertyp, lediglich verschiedener Gitterkonstanten, wobei beide Komponenten in einem Ion übereinstimmen. Wenn p und $q = 1 - p$ die Molbrüche sind, in deren Verhältnis die beiden Komponenten im Mischkristall vorkommen, wird bei diesem eine einheitliche Gitterkonstante $R_0 = p R_1 + q R_2$ angenommen, wobei R_1 und R_2 die Gitterkonstanten der beiden Komponenten sind (Vegardsche Regel). Der im Ionenkristall neben dem elektrostatischen Anteil der Gitterenergie zu berücksichtigende Energieanteil der Abstoßungskräfte, $\varphi(R)$, übe lediglich auf den nächsten Nachbarn im Gitter einen Einfluß aus. Dieser wird praktisch durch eine „charakteristische Konstante“ ϑ gegeben, definiert durch $\vartheta + 2 = -R\varphi''(R)/\varphi'(R)$. Während Wasastjerna für beide Komponenten des Mischkristalls mit gleichem ϑ gerechnet hatte, läßt Verf. verschiedene Werte ϑ_1 und ϑ_2 zu. Der rein elektrostatische Anteil der Bildungswärme Q des Mischkristalls aus den Komponenten

beträgt $Q_I = \frac{N C e^2}{R_0} q p \left(\frac{R_1 - R_2}{R_0} \right)^2$ (N Avogadro'sche Konstante, C Madelung-Konstante mal

Quadrat der Wertigkeit der Ionen, e Ladung des Elektrons). Für die Gesamtbildungswärme erhält Verf. $Q_{II} = \frac{1}{2} Q_I (q \vartheta_1 + p \vartheta_2)$. Wenn Verf. mit Wasastjerna annimmt, daß die beiden in den Komponenten verschiedenen Ionen ihre richtige Lage im Idealkristallgitter inne haben (?), für das den Komponenten gemeinsame Ion jedoch, wo sich dies zwischen 2 verschiedenen nächsten Nachbarn befindet, die geometrische Verschiebung berücksichtigt wird, ergibt sich für die Bildungswärme $Q_{III} = Q_I \left(\frac{1}{8} (\vartheta_1 + \vartheta_2) + \frac{1}{2} \right)$. Der sich hieraus für $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta$ ergebende Wert $Q_{III} = \frac{1}{4} Q_I (\vartheta + 2)$ findet sich nicht in der Arbeit von Wasastjerna, die in diesem Punkt zu berichtigen ist. — In Abhängigkeit von der absoluten Temperatur T , der Kompressibilität K_T und dem kubischen Wärmeausdehnungskoeffizienten γ ergibt sich

$$\vartheta = \frac{3 + 4 T \gamma}{K_T \cdot C e^2 / 6 R^4 - T \gamma}.$$

Verf. findet beim System KCl—KBr die numerischen Werte $\vartheta_1 = 8,99$ bzw. $\vartheta_2 = 9,09$, bei KCl—RbCl 9,01 bzw. 9,17, also keine sehr große Verschiedenheit der ϑ -Werte. — Verf. leitet auch den Wert der Bildungswärme ab bei Berücksichtigung des „Grades der lokalen Ordnung“; σ ; für $\vartheta_1 = \vartheta_2$ ergibt sich $Q_{IV} = Q_I \left(\frac{1}{2} \vartheta (1 - \sigma) + \frac{1}{2} (1 + \sigma) \right)$ statt einer weniger einfachen und weniger genauen Formel bei Wasastjerna. Verf. stellt sehr befriedigende Übereinstimmung seiner Ergebnisse mit früheren Messungen fest. Otto Emersleben.

Hovi, Väinö: On the configurational free energy of binary solid solutions of alkali halides. Comment. phys.-math., Soc. Sci. Fennica 15, Nr. 15, 8 S. (1950).

Hovi, Väinö: The configurational free energy of KCl-KBr mixed crystals at different temperatures. Comment. phys.-math., Soc. Sci. Fennica 15, Nr. 16, 12 S. (1950).

Beide Arbeiten stützen sich auf Veröffentlichungen von J. A. Wasastjerna, von denen eine [Comment. phys.-math., Soc. Sci. Fennica 14, Nr. 3 (1948)] in einem binärem Mischkristall z. B. eines Alkalihalogenids die Wahrscheinlichkeit der Anordnung der einzelnen Ionen zwischen den verschiedenen nächsten Nachbarn untersucht und als Maß den „Grad der lokalen Ordnung“, σ , verwendet, während die andere (dies. Zbl. 34, 430) sowie eine eigene Arbeit des Verf. (siehe vorsteh. Referat) die Bildungswärmen Q_I bis Q_{IV} des Mischkristalls aus den Komponenten unter verschiedenen Annahmen behandelt hat — in Abhängigkeit von 2 charakteristischen Konstanten, ϑ , die bei Wasastjerna als gleich, beim Verf. als verschieden für jede Komponente des Mischkristalls, ϑ_1 und ϑ_2 , angenommen wurden. — Auf Grund dieser Ergebnisse wird in der ersten Arbeit (Nr. 15) der Weg zur Berechnung der freien Energie der Anordnung der Mischkristallkomponenten in binären festen Lösungen von Alkalihalogeniden in Abhängigkeit von dem Parameter σ der Nahordnung angegeben. Die Werte interessieren u. a. für Alterungsvorgänge. Für die dabei auftretenden Differenzen der Bildungswärme $\Delta Q = Q_{III} - Q_{IV}$ ergibt sich die Identität $\Delta Q = \sigma (Q_{II} - Q_{III})$. — In der 2. Arbeit (Nr. 16) werden numerische Werte berechnet für das System der KCl-KBr-Mischkristalle bei 5 verschiedenen Temperaturen von 0° C bis -100° C. Die genannte freie Energie hat in allen Fällen ein ausgeprägtes Extremum als Funktion des Molbruchs p der KCl-Komponente, nahe $p = \frac{1}{2}$ (das sich mit abnehmender Temperatur etwas mehr nach $p > \frac{1}{2}$ zu verschiebt). Nach diesem Ergebnis sollte die kritische Temperatur T_c unterhalb der das System KCl-KBr nicht lückenlos Mischkristalle bildet, unterhalb -100° C liegen. Da aus früheren Versuchen ein wesentlich höherer Wert von T_c abgeleitet wurde, beide Untersuchungen aber auf theoretischen Näherungen beruhen, beabsichtigt Verf., auf die von ihm benutzte statistische Methode in einer genaueren Untersuchung zurückzukommen. (Verf. rechnet in der ersten Arbeit im allgemeinen mit Kri-

allen vom Steinsalztyp. In der zweiten Arbeit wird speziell mit den numerischen Werten dieses Gittertyps gerechnet. Dagegen wird die Frage nicht untersucht, ob eine etwa bei Temperaturerniedrigung eintretende Unstabilität dieses Gittertyps als Ursache für die bei tieferen Temperaturen von ihm gefundene Diskrepanz in Betracht kommt. Ref.) *Otto Emersleben.*

Hovi, Väinö: Entropy as a function of local order for binary solid solutions of alkali halides. Comment. phys.-math., Soc. Sci. Fennica 15, Nr. 17, 5 S. (1950).

In Anlehnung insbesondere an 2 frühere Arbeiten (siehe vorstehende beide Referate) leitet Verf. einen Ausdruck ab für die Änderung der Entropie bei einem binären Mischkristall von Alkalihalogeniden, in dem ausschließlich Nahordnung besteht, bei Übergang von einem zu einem anderen Ordnungszustand. Speziell betreffen die Untersuchungen den Fall, daß beide Komponenten des Mischkristalls in einem Ion (entweder dem Anion oder dem Kation) überinstimmen. Numerische Berechnungen werden für die Entropieänderung eines Mischkristalls aus je 50 Mol-% KCl-KBr bei Übergang von -100°C auf 0°C ausgeführt. Ergebnis: $\Delta S = 0,13 \text{ cal/Mol. Grad.}$ *Otto Emersleben.*

Buerger, M. J.: Limitation of electron density by the Patterson function. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 36, 738—742 (1950).

Verf. zeigt in früheren Arbeiten, daß sich Elektronendichte $\rho(x, y, z)$ und Pattersonfunktionen in einem Kristall dann auf Vektorgesamtheiten („fundamental set“ bzw. „vector set“) reduzieren lassen, wenn die Atome punktförmig gedacht werden, sowie daß man aus dem der Pattersonfunktion entsprechenden vector set den zugehörigen fundamental set finden und damit in gewissem Sinne die Kristallstruktur aus den Intensitäten der Röntgenbeugungsreflexe ableiten kann [Acta Cryst. 3, 87—97 (1950)]. Dies bedeutet, daß bisher unbekannte Beziehungen zwischen Elektronendichte und Pattersonfunktion bestehen. Es werden aus der Pattersonfunktion zwei Funktionsgruppen $\Pi_n(x, y, z)$ und $M_n(x, y, z)$ gewonnen, die $\rho(x, y, z)$ nach oben hin abzuschätzen gestatten. Diese Ungleichungen gestatten es, Gebiete anzugeben, in denen eine bestimmte Atomart sicher nicht gelegen ist; sie werden besonders dann brauchbar, wenn sich die Elektronendichten verschiedener Atome nicht oder nur wenig überlappen. Die Methode wird beeinträchtigt durch das Weglassen höherer Glieder in der Fourieranalyse; vor ihrer Anwendung müssen die dadurch entstehenden Fehler korrigiert werden. *Alfred Seeger.*

Sondheimer, E. H.: The influence of a transverse magnetic field on the conductivity of thin metallic films. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 80, 401—406 (1950).

Im Rahmen der Sommerfeldschen Metallelektronen-Theorie wird der Einfluß eines transversalen homogenen Magnetfeldes auf die Leitfähigkeit in einer dünnen Metallschicht untersucht. Dabei wird im allgemeinen Fall angenommen, daß ein bestimmter Bruchteil p der auf die Grenzfläche auftretenden Elektronen an ihr elastisch ohne Impuls- und Energieübertragung reflektiert wird, während der Rest von der Wand in beliebiger Richtung zurückfliegt. Die recht unübersichtlichen Schlußformeln für die Leitfähigkeit und den Hall-Koeffizienten werden in ihrer Abhängigkeit von p und von der Schichtdicke durch eine Reihe von Diagrammen anschaulich dargestellt. *Fritz Sauter.*

Klein, Martin J. and Robert S. Smith: A note on the classical spin-wave theory of Heller and Kramers. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 80, 1111 (1950).

Heller und Kramers hatten 1934 die von Bloch gefundenen Energieterme eines Ferromagneten dadurch neugewonnen, daß sie die Elektronenspins mit ihrer Wechselwirkung zunächst klassisch behandelten und die dabei auftretenden Spinwellen nachträglich quantisierten. Bei dieser Ableitung waren ein paar Vereinfachungen vorgenommen worden, die jetzt von den Verff. kritisiert, bzw. durch entsprechende Betrachtungen richtiggestellt werden. *Fritz Sauter.*

Wohlfarth, E. P.: Interchange interaction and collective electron ferromagnetism. Phil. Mag., J. theor. exper. appl. Phys., London, VII. S. 40, 703—717 (1949).

Der üblichen, auf Heisenberg zurückgehenden Behandlung des Ferromagnetismus durch Aufsuchen der Eigenwerte einer Wellengleichung für die Spineinstellung

in einem Ferromagneten hat E. C. Stoner eine statistische Methode gegenübergestellt, bei der die Gesamtenergie des Ferromagneten, ähnlich wie bei Thomas und Fermi, berechnet wird aus der kinetischen Energie des völlig entarteten Elektronengases und aus einem zweiten Energieterm, welcher der Austauschwechselwirkung zwischen den Elektronenspins entspricht. Als weiteren Energieterm betrachtet nun Verf. eine Korrelationsenergie, wie sie seinerzeit von Wigner für ein freies Elektronengas berechnet wurde, und schätzt deren Verlauf unter Zugrundelegung des Bändermodells ab. Der auf diese Weise für Nickel gefundene Gang der spontanen Magnetisierung mit der Temperatur zeigt zwar beträchtliche Abweichungen von der gemessenen Magnetisierungskurve, doch will Verf. versuchen, aus diesen Abweichungen Rückschlüsse auf die Wechselwirkung zwischen den einzelnen Elektronenspins zu ziehen.

Fritz Sauter.

Hahn, E. L.: Spin echoes. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 80, 580—594 (1950).

Schaltet man bei einem magnetischen Kernresonanz-Versuch senkrecht zum statischen Magnetfeld kurzzeitig ein magnetisches Wechselfeld mit der Resonanzfrequenz ein, so hängt das weitere Geschehen wesentlich vom Verhältnis der Einschaltdauer dieses Wechselfeldes zur Zeit ab, die benötigt wird, um die Phasenbeziehungen zwischen den einzelnen präzedierenden Spins durch deren gegenseitige Wechselwirkung völlig zu zerstören. Verf. untersucht theoretisch und experimentell den Fall, daß dieses Verhältnis klein gegen 1 ist.

Fritz Sauter.

Kernphysik:

Prentki, Jacques: Sur la production des mésons π dans les collisions nucléon-nucléon (théorie pseudo-scalaire). C. r. Acad. Sci., Paris 231, 1434—1436 (1950).

La section efficace est calculée par la technique de Feynman, compte tenu des termes d'échange de Pauli. On se limite finalement à l'approximation non relativiste, et l'on trouve que: 1. la distribution angulaire est isotrope dans le système du centre de gravité, 2. les sections efficaces sont plus grandes pour les chocs de deux nucléons de même nature, et, 3. indépendantes de la nature chargée ou symétrique des forces nucléaires. — La comparaison de ces conclusions avec les résultats expérimentaux de Berkeley, situés à la limite de la théorie précédente suggère que le champ nucléaire est „symétrique“, et qu'il faut tenir compte de l'effet de liaison des nucléons dans les noyaux, ainsi que du principe d'exclusion.

O. Costa de Beauregard.

Elnadi, M. A.: A quantum theory for nuclear forces. Proc. math. phys. Soc. Egypt, Cairo 4, 35—39 (1949).

Die de Brogliesche Theorie der Kernkräfte, die ein Meson aus zwei Elementargebilden mit dem Spin $\frac{1}{2}$ zusammensetzt, wird modifiziert. Bei Spezialisierung dieser Theorie auf Photonen ergeben sich die elektromagnetischen Feldgrößen.

K. H. Höcker.

Thirring, Walter: Symmetrische Quantisierung. Acta phys. Austriaca 4, 125—128 (1950).

Die rechte Seite der Vertauschungsrelation für ein skalares Mesonfeld wird gewöhnlich durch langwierige, korrespondenzmäßige Überlegungen gewonnen. Sie muß andererseits eine ungerade, lorentzinvariante Lösung der Feldgleichung $(\square - \mu^2)\psi = 0$ sein. Verf. will zeigen, daß die einzige Lösung mit diesen Eigenschaften die Δ -Funktion ist. (Bem. des Ref.: $f(\lambda)$ vor Gl. (5) ist Schwingers $4\pi\Delta$ und genügt nicht der homogenen Gleichung, was Verf. in Gl. (5) zu beweisen sucht. Jedoch ist sein Ergebnis richtig, wie man etwa nach einer Fouriertransformation sieht).

Gerhard Höhler.

Ashkin, J., T. Auerbach and R. Marshak: Note on a possible annihilation process for negative protons. Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 79, 266—271 (1950).

Der Wirkungsquerschnitt für die Zerstrahlung von Proton-Antiproton-Paaren wird nach dem normalen Störungsverfahren berechnet, und zwar mit skalarer und pseudoskalarer Mesonentheorie. Für sehr kleine Geschwindigkeiten v des Antiprotons ist der Wirkungsquerschnitt für die Zerstrahlung in zwei geladene π -Mesonen proportional zu $1/v$ und um den Faktor $\frac{1}{4}(137)^2 g^4$ größer als der für den Übergang in zwei γ -Quanten. Für den Prozeß $p^+ + p^- \rightarrow \pi^0 + \pi^0$ verschwindet der Wirkungsquerschnitt im Grenzfall $v \rightarrow 0$. Weiter wird noch diskutiert, wie man z. B. in der kosmischen Strahlung Zerstrahlung von Nukleonenpaaren von anderen Ereignissen unterscheiden könnte.

Reinhard Oehme.

Bergmann, Otto: Eine Differentialgleichung für die Phase bei der Streuung neutron-Proton. Acta phys. Austriaca 4, 62—70 (1950).

Der von Camac und Bethe [Phys. Rev., Lancaster Pa., II. S. 73, 191 (1948)] für die rechteckige Potentialmulde angegebene Ausdruck für δ_l wird für beliebige Potentiale erweitert, wobei deren Einfluß auf die Außenraum-Lösung von einem willkürlichen Radius r_0 vernachlässigt wird. Diese Erweiterung ist jedoch für $r_0 > 0$ ungeeignet. Verf. gibt daher ein neues Verfahren an, durch das die Differentialgleichung 2. Ordnung in eine Riccatische Differentialgleichung überführt wird, die auch für $l > 0$ einen einfachen Integralausdruck für die Phase liefert; Angabe einer Fehlerabschätzung, wenn dieser Ausdruck, der das Potential $V(r)$ enthält, nicht geschlossen, sondern nur bis zu hinreichend großem $r = r^*$ numerisch integriert werden kann.

B. Ilchner.

Teichmann, T.: Beam oscillations in an F-M cyclotron. J. appl. Phys., Lancaster Pa. 21, 1251—1257 (1950).

Verf. untersucht die radialen und achsialen Schwingungen um den Gleichgewichtskreis in einem Synchro-Zyklotron, welche durch die besondere Gestalt des Magnetfeldes bedingt sind. Es ergibt sich, daß verschiedene Oszillationen von konstanter und zunehmender Stärke in Feldgebieten mit Abweichungen von der Rotationssymmetrie auftreten können. Im achsial- und vertikal-symmetrischen Feld gibt es nur eine derartige Schwingung (für $n \approx 1/5$). Die Bedingungen für das Auftreten der verschiedenen Oszillationen werden diskutiert.

Walter Glaser.

Astronomie. Astrophysik. Geophysik.

● Prey, A.: Einführung in die sphärische Astronomie. Wien: Springer-Verlag 1949. VII, 316 S. DM 24,—.

Wenn auch die sphärische Astronomie schon lange nicht mehr ein Hauptgebiet der Astronomie ist, so gibt es doch immer wieder auch moderne Probleme, für die es die klassische Grundlage darstellt. Man braucht z. B. nur an den überaus wichtigen Begriff des Fundamentalsystems zu denken. — Um so bedauerlicher war seit Jahrzehnten der Mangel an einem deutschen modernen Lehrbuch der sphärischen Astronomie, ein Ersatz für den „klassischen Brünnow“. Das vorliegende Buch bietet zwar eine Einführung in die sphärische Astronomie, enthält aber sehr oft nicht die tiefer liegenden Probleme. Es gliedert sich in 3 Teile: Die sphärische Astronomie (165 S.), Die astronomischen Instrumente (55 S.), Die geographischen Ortsbestimmungen (29 S.). Hierzu kommt als Anhang ein Abschnitt: Die Methode der kleinsten Quadrate (29 S.) — Vieles ist gegenüber älteren Darstellungen modernisiert worden und die Ausstattung ist vorzüglich. Aber man vermißt doch manche Dinge, die heute unbedingt zur sphärischen Astronomie zu zählen sind; so vor allem die Methoden zur Reduktion photographischer Himmelsaufnahmen, die Bestimmung heliographischer Koordinaten. Bezüglich der astronomischen Konstanten wäre es

gut gewesen, ihren inneren Zusammenhang mehr herauszustellen und zu versuchen, das international anerkannte System von Werten zu geben. (Die neueren Arbeiten z. B. von DeSitter, 1938, sind nicht berücksichtigt.) — Das Kapitel Ortsbestimmungen ist ein wenig zu kurz gekommen. Man vermißt die modernen Methoden der Nautik und einen Hinweis auf die vielen hier zur Verfügung stehenden Tafelwerke. Vielleicht wäre es günstiger gewesen, den Abschnitt über die Methode der kleinsten Quadrate hierfür fortzulassen. — Trotzdem besitzt das Buch für den Anfänger, der sich mit dem Gegenstand vertraut machen will, einen großen Wert. Wer allerdings tiefer einzudringen wünscht und vor allem die modernsten Daten sucht, wird mitunter ein wenig enttäuscht sein. Bei dem vorgegebenen Umfang ließ sich aber kaum eine gründlichere Darstellung ermöglichen.

Karl Schütte.

Marinbach, A. B.: Eine Möglichkeit der astronomischen Bestimmung des geodätischen Azimuts ohne Kenntnis der astronomischen Koordinaten des Punktes. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 64, 791—794 (1949) [Russisch].

Für die Ausgleichung astronomisch-geodätischer Netze ist eine gleichmäßige Genauigkeit der Laplaceschen Azimute in allen Netzteilen erwünscht. Da der Fehler eines aus der Laplaceschen Gleichung abgeleiteten geodätischen Azimuts infolge seiner Abhängigkeit vom Fehler der astronomisch bestimmten Länge mit der geographischen Breite des Beobachtungsortes wächst, erfordern die bisher üblichen Methoden bei zunehmender Breite des Beobachtungsortes einen erhöhten Arbeitsaufwand und versagen in der Nähe der Pole ganz. Das vom Verf. entwickelte Verfahren gestattet es, Azimut, Länge und Breite mit einer von der Lage des Beobachtungsortes unabhängigen Genauigkeit zu bestimmen. Zu diesem Zweck werden die Horizontalwinkel zwischen dem irdischen Ziel und mindestens 3 Sternen durch mehrfache Einstellung jedes Sternes im Okularmikrometer beobachtet, wobei die Zeitmomente mit einer Uhrkorrektur bezüglich der Sternzeit des Ausgangsmeridians zu versehen sind (nach Radio-signalen). Verf. verallgemeinert den Begriff des Laplaceschen Azimuts, indem er ein sog. „berechnetes Zenit“ einführt, dessen Koordinaten φ° und λ° so festgesetzt werden, daß ihre Abweichungen ξ° und η° von den astronomischen Werten kleine Größen sind. Die im Okularmikrometer gemessenen Distanzen werden mittels ξ° und η° vom wahren Zenit auf das „berechnete Zenit“ übertragen. Nach Wahl eines geeigneten Näherungswertes für das Azimut des irdischen Ziels findet man das auf das berechnete Zenit bezogene Azimut α° dieses Ziels sowie die Größen ξ° und η° aus einem System linearer Gleichungen. Die hierfür nötigen Formeln werden mitgeteilt. Der Übergang vom „berechneten“ zum geodätischen Zenit wird durch die Laplacesche Gleichung vollzogen, in der an Stelle der astronomischen Koordinaten die Werte φ° und λ° auftreten, so daß der Fehler der astronomisch bestimmten Länge nicht zur Auswirkung kommt. Eine beträchtliche Verminderung der Beobachtungsarbeit und eine Vereinfachung der Instrumente wird ermöglicht, wenn die Sterne im Vertikal des irdischen Ziels durch mikrometrische Messung der Winkel beobachtet werden.

W. Hofmann.

Eichhorn, Heinrich: Über Funktionaldeterminante und Ausnahmefälle bei der Bahnbestimmung in der Ellipse. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., S.-B., IIa 158, 203—225 (1950).

Das Problem der Bahnbestimmung eines Himmelskörpers besteht, mathematisch gesehen, darin, die sechs Bahnelemente aus sechs durch Beobachtung gewonnenen Daten sowie den Beobachtungszeiten und gewissen aus den astronomischen Jahrbüchern bekannten Parametern zu berechnen. Es bestehen also zur Bestimmung der sechs Unbekannten sechs Gleichungen $F_i = 0$, wo die Ausdrücke F_i implizite Funktionen der Unbekannten und der Parameter sind. Die Auflösung dieses Gleichungssystems ist nur dann möglich, wenn seine Funktionaldeterminante nicht verschwindet. Verf. stellt in seiner Untersuchung die sehr komplizierte Funktionaldeterminante auf und analysiert die Fälle, in denen sie gleich null wird, d. h. also die Ausnahmefälle, in denen eine Bahnbestimmung aus drei vollständigen Beobachtungen (Länge und Breite) des Himmelskörpers unmöglich ist. K. Stumpff.

Ramsey, W. H.: On the instability of small planetary cores. I. Monthly Not. astron. Soc., London 110, 325—338 (1950).

Die innere Struktur eines Planeten ist mathematisch berechenbar, falls eine formelmäßige Beziehung für die Abhängigkeit der Dichte vom Druck $\rho(p)$ bekannt ist; ihre Einsetzung in die statische Grundgleichung $dp = -g \rho dr$ ergibt

ann durch Integration den Druck p als Funktion des Radius r , und der gesamte Aufbau ist durch einen Parameter bestimmt, etwa durch die Mittelpunktsdichte ρ_0 , die als Integrationskonstante auftritt. Da die Erde erfahrungsgemäß einen Kern besitzt, an dessen Grenze sich die Dichte sprunghaft ändert, betrachtet der Verf. ein Modell, für das die Dichte im Kern konstant gleich ρ_0 , außerhalb des Kerns ebenfalls konstant gleich $\lambda \rho_0$ ist; der Dichtesprung tritt bei einem gewissen kritischen Druck p_c ein. Es zeigt sich nun, daß gewisse Werte der Gesamtmasse M durch drei verschiedene Werte des Mittelpunktsdrucks, also durch drei verschiedene Modelle realisiert werden können. Es wird untersucht, welche dieser Modelle stabil gegen kleine Änderungen der Gesamtenergie sind. Zum Schluß wird die Möglichkeit diskutiert, daß ein Planet vor langer Zeit infolge säkularer Temperaturänderung sprunghaft von einem Zustand in den anderen übergegangen sei; es wird die Hypothese aufgestellt, daß die dabei freiwerdende Energie einen Bruchteil der Planetenmasse in den Raum hinausgeschleudert hat, aus dem sich die Meteore und Planetenoiden gebildet haben können. *Werner Schmeidler.*

Lighthill, M. J.: On the instability of small planetary cores. II. Monthly Not. astron. Soc., London **110**, 339—342 (1950).

Behandelt das gleiche Thema wie die oben referierte Arbeit I und zeigt, daß deren Resultate noch richtig bleiben, wenn die Dichte nicht konstant, sondern irgendeine Funktion des Drucks $\rho(p)$ ist, die bei einem kritischen Druck p_c sich sprunghaft von $\rho(p_c)$ in $\lambda \rho(p_c)$ mit $\lambda > 1$ ändert. *Werner Schmeidler.*

Bondi, C. M.: Models for red giant stars. I. General discussion and application to homogeneous models. Monthly Not. astron. Soc., London **110**, 275—286 (1950).

Die vorliegende ist die erste einer Reihe von Arbeiten, in denen Verf. eine systematische Untersuchung aller Modelle durchführen will, die vom mathematischen Standpunkt aus für den Aufbau der roten Riesensterne in Betracht kommen können. Nach einer kurzen allgemeinen Erörterung des Problems der roten Riesen wird zuerst der mathematisch einfachste Fall, nämlich der der homogenen Modelle, behandelt. Es wird dabei gezeigt, daß die roten Riesensterne nach keinem homogenen Modell aufgebaut sein können, wenigstens wenn die jetzigen Ansichten über die für das das Sterninnere geltenden Opazitätsgesetze richtig sind und es sich auch bei den Energiequellen der Riesensterne um Atomkernprozesse handelt. *H. Vogt.*

Bondi, C. M. and H. Bondi: Models for red giant stars. II. Models with a chemical inhomogeneity and opacity due to photoelectric effect. Monthly Not. astron. Soc., London **110**, 287—304 (1950).

Nachdem Verf. (s. vorsteh. Referat) gezeigt hat, daß bei unserer jetzigen Kenntnis über die Opazität und die Energieerzeugung im Sterninneren kein homogenes Modell für den Aufbau der roten Riesensterne in Betracht kommen kann, behandelt er jetzt das nächsteinfachste Modell, bei dem die chemische Zusammensetzung des Sternes eine einzige Diskontinuität aufweist, ein Modell, das von Hoyle und Lyttleton vorgeschlagen wurde. Eine derartige Diskontinuität in der chemischen Zusammensetzung eines Sternes soll dadurch zustande kommen können, daß sich an einem Stern, der bereits einen wesentlichen Teil seines Wasserstoffs in Helium umgewandelt hat, beträchtliche Mengen hauptsächlich aus Wasserstoff bestehender interstellarer Materie anlagern. Das Ergebnis der Untersuchung, die sich über das ganze System der Modellvarianten mit einer chemischen Diskontinuität erstreckt, ist, daß, selbst wenn nur ein mäßiger Teil der Gesamtmasse des Sternes in der äußeren Sternhülle enthalten ist, sehr große Sternradien, wie sie die roten Riesensterne zeigen, möglich sind. *H. Vogt.*

Rosseland, Svein: On the luminosity-velocity relation of cepheids. Monthly Not. astron. Soc., London **110**, 440—443 (1950).

Verf. kommt zu dem Ergebnis, daß eine von Milne (dies. Zbl. **36**, 284) entwickelte Methode, unter bestimmten physikalischen Voraussetzungen die Hellig-

keit-Geschwindigkeits-Beziehung der pulsierenden Sterne zu erklären, auch nicht ohne weiteres zum Ziele führt, wenn man den wirklichen physikalischen Verhältnissen im Sterninneren Rechnung trägt. Er weist dann auf Möglichkeiten hin, wie man seiner Ansicht nach der Lösung des Problems näher kommen könne.

H. Vogt.

Woolley, R. v. d. R. and C. W. Allen: Ultra-violet emission from the chromosphere. *Monthly Not. astron. Soc., London* **110**, 358—372 (1950).

Es wird ein sphärisch-symmetrisches Modell der Chromosphäre entworfen, das möglichst viele der beobachteten Erscheinungen bei „ruhiger“ Sonne richtig wiedergeben soll. Es werden zwei Schichten wesentlich verschiedener Eigenschaften unterschieden, die durch die Zone getrennt sind, in der der Wasserstoff zur Hälfte ionisiert ist mit $T = 6300^\circ$. Die untere Schicht hat konstante Temperatur (5040°) und ist optisch dick; ihre Höhe beträgt 6×10^8 cm. Die obere Schicht ist optisch dünn, hat einen sehr steilen Temperaturgradienten bis zur Koronatemperatur von 10^6 Grad und erhält ihre thermische Energie von der Korona, die sich stetig anschließt, durch Wärmeleitung. Aus ihr kommt die Strahlung im radiofrequenten Bereich. Die zur Bildung der Ionosphäre ausreichende UV-Strahlung besteht zum größten Teil aus Linienstrahlung hochionisierter Elemente der oberen Schicht (6×10^{14} Quanten/cm² sec.), der Rest aus der kontinuierlichen Lymanstrahlung der Trennschicht von 6300° (1×10^{14} Quanten).

Gerd Burkhardt.

Papapetrou, A.: A 4-dimensional generalization of Wilson's hypothesis. *Phil. Mag., J. theor. exper. appl. Phys., London*, VII. S. **41**, 399—404 (1950).

Vor fast 30 Jahren hatte H. A. Wilson eine Hypothese zur Deutung des Erdmagnetismus ausgesprochen, nach der mit einer um ein Zentrum mit der Geschwindigkeit v umlaufenden Massendichte ρ ein Strom $\vec{s} = -\sqrt{G} \rho v/c$ verbunden sein soll, wobei G die Gravitationskonstante und c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Verf. gibt nun eine vierdimensionale Verallgemeinerung dieser Gleichung an und diskutiert einige ihrer Konsequenzen.

Fritz Sauter.

Batchelor, G. K.: On the spontaneous magnetic field in a conducting liquid in turbulent motion. *Proc. R. Soc., London*, A **201**, 405—416 (1950).

Für eine gut leitende Flüssigkeit werden die Maxwellschen Gleichungen und eine Gleichung für die Stromdichte angesetzt. Dabei soll zunächst kein äußeres magnetisches oder elektrisches Störfeld vorhanden sein. Bildet man aus diesen Gleichungen durch Elimination eine Gleichung, in der nur die magnetische Feldstärke vorkommt, so hat diese die gleiche Form wie die rein hydrodynamische Gleichung für den Wirbel \vec{v} (wo \vec{v} = Geschwindigkeitsvektor). Wegen dieser Analogie lassen sich viele Ergebnisse, die in der klassischen Hydrodynamik für den Wirbel gewonnen werden, auf die magnetische Feldstärke übertragen. Es wird weiter die Stabilität einer homogenen turbulenten gut leitenden Flüssigkeit bei Anwesenheit von kleinen magnetischen Störfeldern untersucht. Auch hierbei ist die Analogie zwischen magnetischer Feldstärke und Wirbel nützlich. Ist die Leitfähigkeit größer als ein kritischer Wert, der von der Zähigkeit der Flüssigkeit abhängt, so wächst die magnetische Energie, bis ein stationärer Zustand erreicht ist, der durch die Energie der Turbulenz bestimmt wird.

W. Kertz.

McVittie, G. C.: A systematic treatment of moving axes in hydrodynamics. *Proc. R. Soc., London*, A **196**, 285—300 (1949).

Die Gleichungen der Hydrodynamik werden auf ein bewegtes System krummliniger Koordinaten mit Hilfe der Tensorrechnung ohne den Satz von Coriolis transformiert. Die kinetische Metrik als grundlegende Größe wird durch eine vierdimensionale quadratische Form mit Hilfe der kinetischen Energie definiert. Die klassische Mechanik wird aus der speziellen Relativitätsmechanik durch sukzessive Näherung nach Gliedern von $1/c^2$ gewonnen. Die Bewegungsgleichungen werden durch den

nergietensor ausgedrückt. An zwei Beispielen, die sich auf die Bewegung der Luft auf der rotierenden Erde beziehen, wird die allgemeine Theorie erläutert: 1. In rechtwinkligen Koordinaten wird die troposphärische Bewegung beschrieben, wobei sich als Spezialfälle die Formeln von Petterssen und Helmholtz für die Änderung der Rotation ergeben. 2. An den Bewegungsgleichungen in örtlichen Zylinderkoordinaten wird das Instabilitätskriterium in der Theorie von Sawyer über die Entwicklung tropischer Zyklone (Störung einer symmetrischen Kreisbewegung durch geringe Änderung des Druckgradienten) geprüft.

Joachim Pretsch.

McVittie, G. C.: Two-dimensional fluid motion referred to a network of orthogonal curves. *Proc. R. Soc., London, A* 196, 301—310 (1949).

Die Methode zur Aufstellung der klassischen Gleichungen der Hydrodynamik in Bezug auf ein krummliniges Koordinatensystem (s. vorsteh. Referat) wird auf Bewegungen angewendet, die zu einem Mitglied einer einparametrischen Familie von Ebenen oder Flächen parallel sind. Dann ist es vorteilhaft, die Bewegung auf ein Netzwerk orthogonaler Kurven in dieser Fläche zu beziehen, so daß die geodätischen Krümmungen dieser Kurven in die Gleichungen eingehen. Die aerodynamischen Gleichungen von Meyer werden als Sonderfall für raumfestes Netzwerk und die Bewegungsgleichungen für großräumigen entlang der Isobaren wehenden Gradientenwind als Beispiel für ein auf der Kugel bewegtes Netzwerk abgeleitet. *J. Pretsch.*

Longuet-Higgins, M. S.: The electrical and magnetic effects of tidal streams. *Monthly Not. astron. Soc., geophys. Suppl., London* 5, 285—307 (1949).

Die Gezeitenbewegung des Meerwassers im Magnetfeld der Erde induziert Spannungen von einigen Millivolt pro km. Im ersten Teil der Arbeit wird über Messungen solcher Spannungen berichtet, die im Jahre 1946 bei Plymouth im Kanal ausgeführt wurden. Es wurden zwei Elektrodenpaare (Nordsüd- und Ostwestrichtung) mit einem Elektrodenabstand von 1,8 km verwandt. Die beobachteten Spannungen zeigen eine halbmondentägige Gezeitenwelle, die vor allem in der Nordsüdrichtung hervortritt, da der Gezeitenstrom vorwiegend ostwestlich verläuft. Sie lassen auch deutlich den Unterschied von Nipp- und Springflut erkennen. Dabei werden Erdströme erzeugt, die sich auf beiden Seiten des Kanals in das Land hinein ausbreiten. Erdstromregistrierungen aus der Gegend von Lulworth in 3 km Abstand von der Küste enthalten eine stark ausgeprägte halbmondentägige Welle. Im zweiten, theoretischen Teil der Arbeit werden die Spannungen berechnet, die durch Bewegung des Wassers in seichten Kanälen von rechteckigem oder elliptischem Querschnitt erzeugt werden. Das vorliegende Randwertproblem wird durch Aufstellung der Greenschen Funktion gelöst. Es zeigt sich, daß die auftretende Spannung fast unabhängig von vertikalen Geschwindigkeitsdifferenzen ist, aber die Tiefe des Kanals und die Leitfähigkeit des Kanalbettes gehen wesentlich in die Lösung ein. Bei Annahme einer konstanten Leitfähigkeit des Meeresbodens erstrecken sich die induzierten elektrischen Ströme bis zu einer Tiefe, die vergleichbar ist mit der Breite des Kanals. Theorie und Beobachtung stimmen gut überein, wenn man die Leitfähigkeit des Meeresbodens mit $6 \cdot 10^{-5}$ (Ohm cm) $^{-1}$ ansetzt. *W. Kertz.*

Heinrich, G. und A. Klemenc: Zur Behandlung der Diffusionsvorgänge in der Atmosphäre. *Acta phys. Austriaca* 4, 160—169 (1950).

Die Diffusion tritt überall und immer in der irdischen Lufthülle auf, ihr Studium bildet also eine wesentliche Aufgabe der Physik der freien Atmosphäre, sowohl experimenteller als auch theoretischer Hinsicht. Verff. führen in die Rechnung für jeden Bestandteil des Gemisches den Partialdruck, die Konzentration, das Molekulargewicht, das Verhältnis der Konzentration zur Summe der Konzentrationen aller Bestandteile, den vermischenden, den durch die Schwerkraft bewirkten entmischenden und den Thermodiffusionsstrom ein. Mit diesen Größen bilden sie unter Heranziehung der statischen Druckgleichung, der Zustandsgleichung für ideale Gase

in Verbindung mit dem Daltonschen Gesetz, dem zweiten Fickschen Gesetz und Hinzunahme der Vorstellung einer nichtkonvektiven Verschiebung des Gasgemisches als Ganzes ohne relative Änderung der einzelnen Konzentrationen einen Ausdruck für den nach oben durch die horizontale Flächeneinheit in einer zu wählenden Höhe pro Sekunde hindurchgehenden Diffusionsstrom eines Bestandteiles und den Verschiebungsstrom des ganzen Gemisches. Beide Ausdrücke werden unter Bezug auf die Ableitungen einer vorher veröffentlichten Arbeit der Verff. über die Verteilung des Argons in der Erdatmosphäre mit den anfangs genannten Größen zu einer auswertbaren Gleichung (17) zusammengesetzt, die wichtige Anwendungen auf die Atmosphäre zuläßt. Verff. benutzen sie zur Untersuchung der Möglichkeit des stationären Hindurchwanderns des ständig aus der Erdkruste in die Atmosphäre entweichenden Heliums. Das Ergebnis ihrer Rechnung ist, daß bei Annahme eines stationären Stromes $S > 0$ die Konzentration erst in 80 km Höhe $0,295 \cdot 10^{-10}$ g mol/cm³ gegenüber $0,558 \cdot 10^{-10}$ g mol/cm³ bei statischer Verteilung, also $S = 0$, sein würde, eine Bestätigung der Annahme durch Messungen z. Z. also nicht zu erhoffen ist.

B. Neis.

Martyn, D. F.: Cellular atmospheric waves in the ionosphere and troposphere. Proc. R. Soc., London, A 201, 216—234 (1950).

Horizontal wandernde Störungen der Elektronendichte in der F_2 -Schicht der Ionosphäre führten zu der Vermutung, daß sie herrühren von hydrodynamischen Wellen besonderer Art in der Atmosphäre (wie sie in der Troposphäre wahrscheinlich auch verantwortlich zu machen sind für die dort seit langem bekannten mikrobarometrischen periodischen Druckschwankungen). Es handelt sich also zunächst um ein rein hydrodynamisches Problem; auf die bereits vorliegenden Arbeiten und den Zusammenhang mit angrenzenden Fragen geht der Verf. übersichtlich in der Einleitung ein. In der vorliegenden Untersuchung entwickelt er nun eingehend die Theorie der genannten Wellen. Insbesondere interessieren dabei die Grenzbedingungen; die Wellen pflanzen sich fort zwischen zwei parallelen horizontalen Ebenen, deren eine der Erdboden, deren andere ein Niveau in der Atmosphäre ist, woz. B. ein plötzlicher Temperaturanstieg liegt. Bei der Anwendung auf die Ionosphäre entstehen hier insofern Schwierigkeiten insbesondere hinsichtlich der oberen Grenze, als sie oberhalb der F_2 -Schicht liegen müßte und, wenn sie nicht vorhanden ist, zu einem mit den beobachteten großen Reichweiten der Störungen schwer verträglichen vertikalen Energieverlust führen würde. — Mathematisch führt die entwickelte Theorie der Wellen, ausgehend wie üblich von der Eulerschen Bewegungsgleichung, zu der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \frac{\eta}{n^2} \Phi = 0$, die eine Riccatische ist und durch Besselfunktionen von der Ordnung $\pm \frac{1}{3}$ gelöst werden kann. In zwei besonderen Abschnitten werden die Anwendung der allgemeinen Theorie auf die mikrobarometrischen Oszillationen und einige (mehr qualitative) Überlegungen über die Verhältnisse in der F_2 -Schicht mitgeteilt.

Rudolf Seeliger.

Agostinelli, Cataldo: Effetti sulla rotazione della terra di una legge di attrazione analoga a quella di Weber. Atti Accad. Sci. Torino, Cl. I 84, 48—62 (1950).

La legge di Weber modifica quella di Newton introducendovi un termine correttivo F_c che dipende non solo dalla distanza delle particelle che si attraggono, ma anche dalla sua derivata prima e seconda rispetto al tempo. Inoltre F_c deriva da un potenziale generalizzato (Whittaker, Analytical Dynamics, Cap. 2^o; Cambridge 1904, trad. tedesca Berlin 1924). Nella presente nota, l'autore studia l'influenza del sole e della luna sul moto di rotazione della terra, qualora la legge di Newton si sostituisca con quella di Weber. Dopo aver determinato, con legittime approssimazioni, il potenziale di F_c dimostra che, per effetto di quel termine correttivo, si ha un incremento annuo dell'angolo di precessione, ma nessuna alterazione secolare dell'angolo di nutazione.

Dario Graffi.